O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

1. Introdução

O Teorema do Valor Médio é um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial, especialmente por suas diversas aplicações, que incluem o estudo do gráfico de funções, pesquisa de extremos, obtenção de desigualdades e outras, como veremos.

Lembremos que, se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que um ponto x_0 é um máximo de f em $B \subset A$ se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in B$. Analogamente, definimos ponto de mínimo de f em $B \subset A$.

Definição 1.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$. Dizemos que x_0 é* ***ponto de máximo local*** *de f, se x_0 existe uma vizinhança V de x_0, tal que f é máximo de f em $V \cap A$. Dizemos que x_0 é* ***ponto de mínimo local*** *de f, se x_0 existe uma vizinhança V de x_0, tal que f é mínimo de f em $V \cap A$. Se x_0 é ponto de máximo ou mínimo local, dizemos que x_0 é um* ***ponto de extremo local****.*

Proposição 1.2. *Se I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Se a é um* ***ponto interior*** *de I que é extremo local de f e f é derivável em a então $f'(a) = 0$.*

Dem.

Date: July 11, 2021.

□

Observação 1.3. *(1) Um ponto onde a derivada se anula é denominado um* ***ponto crítico*** *de f. A proposição diz, portanto, que todo ponto de extremo local no interior é ponto crítico. O exemplo da função $f(x) = x^3$, mostra que a recíproca é falsa.*

(2) Nas aplicações, é importante lembrar que o resultado não vale se a é ponto extremo do intervalo ou se f não é derivável em a.

Uma consequência direta da proposição 1.2 é o seguinte resultado importante.

Teorema 1.4. *(Teorema de Rolle) Se* $f : [a,b]$ *é contínua em* $[a,b]$*, derivável no intervalo aberto* $I =]a,b[$ *e* $f(a) = f(b)$ *então existe um ponto* $c \in]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Dem.

$\square$

Teorema 1.5. *(Teorema do Valor Médio - TVM) Se* $f : [a,b]$ *é contínua em* $[a,b]$ *e derivável no intervalo aberto* $I =]a,b[$ *então existe um ponto* $c \in]a,b[$ *tal que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*. Ou seja,* $f(b) - f(a) = f'(c)(c-a)$*.*

Dem. Basta considerar a função $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ e aplicar o Teorema de Rolle.

$\square$

2. Aplicações do TVM

Uma primeira consequência importante do TVM é a seguinte

Teorema 2.1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $I =]a, b[$ com $f'(x) = 0$ em $]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.*

Dem.

$\square$

Corolário 2.2. *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas em $[a, b]$ e deriváveis no intervalo aberto $I =]a, b[$ com $f'(x) = g'(x)$ em $]a, b[$, então existe uma constante C, tal que $f = g + C$ em $[a, b]$.*

Dem.

□

Lembremos agora que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **crescente** em $B \subset \mathbb{R}$ se $f(x) \leq f(y)$, sempre que $x, y \in B$ e $x < y$ e **estritamente crescente** em $B \subset \mathbb{R}$ se $f(x) < f(y)$, sempre que $x, y \in B$ e $x < y$. Analogamente, definimos função **crescente** e **estritamente decrescente**.

Valem então os seguintes resultados:

Proposição 2.3. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo aberto I. Então temos*
a) f é crescente no intervalo I se e somente se $f'(x) \geq 0$ em I. Se $f'(x) > 0$ em I então f é estritamente crescente em I.
b) f é decrescente no intervalo I se e somente se $f'(x) \leq 0$ em I. Se $f'(x) < 0$ em I então f é estritamente decrescente em I.

Dem.

□

Corolário 2.4. *(Critério para extremantes em um intervalo) Sejaf função derivável no intervalo $I =]a, b[$. Seja $c \in I$. Então*

a) Se $f'(x) \geq 0$ em $]a, c[$ e $f'(x) \leq 0$ em $]c, b[$, então c é ponto de máximo de f em I.
a) Se $f'(x) \leq 0$ em $]a, c[$ e $f'(x) \geq 0$ em $]c, b[$, então c é ponto de mínimo de f em I.

Dem.

$\square$

O TVM também é frequentemente usado para demonstração de desigualdades. Vamos considerar alguns exemplos:
1) (Desigualdade de Bernoulli generalizada), Se $\alpha > 1$ então $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$, para todo $x > -1$.

2) $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$. (Aplicação: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^p})$ converge se e somente se $p > 1$).