DERIVADAS - INTRODUÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

1. Introdução

A noção de derivada surge da consideração de dois problemas um da Cinemática e outro geométrico.

No primeiro caso, consideramos um ponto móvel, que se desloca ao longo de um eixo ao longo do tempo, com posição descrita por uma função $P(t)$ no instante t. A *velocidade média* do objeto entre os instantes t_0 e t é dada pelo quociente:

$$v_m(t_0, t) = \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}.$$

A **velocidade instantânea** no instante t_0 é então

$$v_(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}.$$

caso o limite exista.

No segundo caso, consideramos uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A reta secante determinada pelos pontos do gráfico $(a, f(a))$ e $(x, f(x)$ tem inclinação:

$$r(a, x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A **inclinação da reta tangente** ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é então:

$$r(a) := \lim_{x \to a} r(a, x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

caso o limite exista.

Date: July 8, 2021.

O conceito de derivada tem inúmeras outras interpretações nas Ciências Naturais e na Matemática, vamos ver no que segue sua definição precisa e algumas propriedades.

Definição 1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ um ponto de acumulação de A e $f : A \to \mathbb{R}$, uma função. Diremos que f é* ***derivável no ponto*** *a se existir e for finito o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A função $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é frequentemente denominada *quociente de Newton* no ponto a sendo a derivada, portanto o limite desse quociente quando $x \to a$. se este existir.

Se $f : A \subset \mathbb{R}$ é derivável no conjunto $B \subset A$, dizemos que f é derivável em B. Se $B = A$, dizemos simplesmente que f é derivável. A função $f' : B \to \mathbb{R}$ definida por $(f')(x) = f'(x)$, definida em B, é a **função derivada** de f.

Observação 1.2. *O quociente de Newton é frequentemente escrito na forma $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ e então a derivada é dada pelo limite*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Outras notações são também usadas para a derivada, por exemplo:

$$\frac{d\,f}{d\,x}(a), \frac{d}{d\,x}f(a), Df(a), etc.$$

Exemplos 1.3.

(1) Se $f(x) = x^2$, o quociente de Newton no ponto $a \in \mathbb{R}$ é dado por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \text{ se } x \neq a.$$

Portanto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a.$$

Segue que a função $f(x)=x^2$ *é derivável em todo ponto* $a\in\mathbb{R}$ *e*

$$f'(a)=2a,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

(2) Seja $f(x)=|x|$. *Se* $a>0$ *então* $f(x)=x$ *em uma vizinhança de* a. *O queociente de Newton é então dado por*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x-a}{x-a}=1 \text{ se } x\neq a.$$

Portanto $f'(a)=1,\ \forall a>0$. *Analogamente* $f'(a)=-1,\ \forall a<0$.

Agora, se $a=0$ *teremos*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 \text{ se } x>0\\ -1 \text{ se } x<0.\end{cases}$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \text{ e } \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1.$$

Segue que $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *não existe e a função* $f(x)=|x|$ *não é derivável na origem.*

O exemplo (2) mostra que a implicação f contínua em $a\Rightarrow f$ derivável em a é falsa.

A recíproca, entretanto é verdadeira.

Proposição 1.4. *Se* f *é derivável em* a, *então* f *é contínua nesse ponto.*

Dem.

□

Observação 1.5. *Não é difícil construir exemplos de funções contínuas em todos os pontos de um intervalo mas tenham um número infinito enumerável de descontinuidades. É possível também construir exemplos de funções contínuas num intervalo que não sejam deriváveis em nenhum ponto do intervalo, mas a construção é bem mais complicada.*

Proposição 1.6. *(Propriedades algébricas) Sejam f, g funções deriváveis no ponto $a \in \mathbb{R}$. Então temos:*

(1) *$f + g$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
(2) *Se $k \in \mathbb{R}$ é uma constante, então kf é derivável em a e $(kf)'(a) = kf'(a)$.*
(3) *$f \cdot g$ é derivável em a e $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.*
(4) *Se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em a e $\frac{f}{g}'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*
(5) *Se $g(a) \neq 0$, então $\frac{1}{g}$ é derivável em a e $(\frac{1}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$.*

Dem. A prova segue das propriedades dos limites e manipulações algébricas.

□

Exemplo 1.7. *Não difícil mostrar que as funções* $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ *e* $f(x) = x$ *são deriváveis em todo ponto. Das propriedades algébricas, segue então que qualquer função polinomial* $p(x)$ *é derivável e qualquer função racional* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *é derivável em todo ponto* a*, no qual* g *não se anule.*

2. Diferenciabilidade e a regra da cadeia

Queremos agora mostrar que a composta de funções deriváveis é derivável. Para isto, é útil definir um conceito ligeiramente diferente de derivabilidade.

Definição 2.1. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f : A \to \mathbb{R}$*, uma função. Diremos que* f *é* ***diferenciável no ponto*** a *se existir uma constante* $d \in \mathbb{R}$ *tal que, se* $a + h \in A$

$$f(a + h) = f(a) + d \cdot h + r(h),$$

com $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$

Proposição 2.2. *A função* $f : A \to \mathbb{R}$ *é derivável no ponto* $a \in A$ *se e somente se ela for diferenciável no ponto* a *e, nesse caso, teremos*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h),$$

com $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$

Dem.

$\square$

Observação 2.3. *A condição de diferenciabilidade também pode ser escrita na forma:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + u(h) \cdot h,$$

com $\lim_{h\to 0} u(h) = 0$. *Basta, para isto, definir*

$$u(h) := \begin{cases} \frac{r(h)}{h}, & se\ h \neq 0. \\ 0, & se\ h = 0. \end{cases}$$

Proposição 2.4. *(A regra de cadeia) Sejam* $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(A) \subset B$ *e* $f(a) = b$. *Se* f *é diferenciável no ponto* a *e* g *é diferenciável no ponto* b, *então* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *é diferenciável no ponto* a *e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Dem.

Temos
$f(a+h) = f(a)+f'(a)\cdot h+u(h)\cdot h,\ g(b+k) = g(b)+g'(b)\cdot k+v(k)\cdot k,$
com $\lim_{h\to 0} u(h) = \lim_{k\to 0} v(k) = 0$.

Dado um acréscimo $h \in \mathbb{R}$, seja $k = f(a+h) - f(a) = f'(a)h + u(h) \cdot h$.

Então temos:

$$\begin{aligned}
g \circ f(a+h) &= g(f(a+h)) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot (f(a+h) - f(a)) + v(k) \cdot k \\
&= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot (f'(a)) \cdot h + u(h)h) + v(k) \cdot k \\
&= g \circ f(a) + g'(f(a)) \cdot f'(a)) \cdot h + g'(f(a))u(h)h \\
&+ v(k) \cdot f'(a)h + u(h) \cdot h \\
&= g \circ f(a) + g'(f(a)) \cdot f'(a)) \cdot h \\
&+ (g'(f(a))u(h) + v(k) \cdot f'(a) + u(h)) \cdot h
\end{aligned}$$

E como $z(h) := g'(f(a))u(h) + v(k) \cdot f'(a) + u(h) \to 0$ quando $h \to 0$. segue o resultado. $\square$

Exemplo 2.5.
Sabemos que a função $g(y) = y^n$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Se $f(x)$ é diferenciaável em a então $f^n(x) := (f(x))^n$ é derivável em x e $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.

3. Derivada da função inversa

Suponhamos que $f : A \to B$ é derivável no ponto $a \in A$ e tem uma inversa $g : B \to A$. Se soubermos que no ponto $b = f(a)$ então termos $g(f(x)) = x$ e, da regra da cadeira segue que $g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$, ou seja

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dessa fórmula, decorre que uma condição necessária para que a função inversa g seja derivável no ponto $b = f(a)$ é que $f'(a) \neq 0$. O resultado seguinte mostra que isto mais a continuidade de g é também suficiente.

Proposição 3.1. *Suponhamos que $f : A \to B$ é diferenciável no ponto $a \in A$ e tem uma inversa $g : B \to A$, contih nua em $b = f(a)$. Então, se $f'(a) \neq 0$, então g é diferenciável no ponto b e*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Dem.

Para um acréscimo $k \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$g(b+k) = g(b) + \frac{1}{f'(a)} \cdot k + r(k).$$

Precisamos mostrar então que

$$\lim_{k \to 0} \frac{r(k)}{k} = 0.$$

Seja $h \in \mathbb{R}$ talque $f(a+h) = f(a) + k$. Temos então:

$$\begin{aligned} r(k) &= g(b+k) - g(b) - \frac{1}{f'(a)} \cdot k \\ &= a + h - a - \frac{1}{f'(a)} \cdot (f(a+h) - f(a)) \\ &= h - \frac{f(a+h) - f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

Portanto, como $k = f(a+h) - f(a)$, obtemos

$$\frac{r(k)}{k} = \frac{h}{f(a+h) - f(a)} - \frac{1}{f'(a).}$$

E, finalmente , como $h \to 0$, quando $k \to 0$, segue que

$$\lim_{k\to 0}\frac{r(k)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(a+h)-f(a)}-\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(a)}-\frac{1}{f'(a)}=0.$$

□

Observação 3.2. *O resultado pode também ser provado,mais simplesmente, observando que*

$$\lim_{k\to 0}\frac{g(b+k)-g(b)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}=\frac{1}{f'(a)}.$$

Optamos pela demonstração, usando a diferenciabilidade, que pode ser facilmente generalizada para várias variáveis.

Exemplos 3.3.

(1) Usando o ‘ primeiro limite fundamental’ :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1,$$

não é difícil mostrar que

$$\frac{d}{d\,x}\,sen\,x=\cos x.$$

Da identidade trigonométrica: $sen^2 x+\cos^2 x=1$*, obtemos*

$$\frac{d}{d\,x}\cos x=-sen\,x.$$

Sendo a função $sen\,x$ *estritamente crescente no intervalo* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*, definimos a função inversa* $arcsen\,(x):]-1,1[\to\mathbb{R}$*.*

Segue da proposição 3.1 que, se $y=sen\,x, x\in]-\pi/2,\pi/2[$:

$$arcsen'(y)=\frac{1}{sen'(x)}=\frac{1}{\cos(arcsen\,y)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(2) Usando o ‘segundo limite fundamental’ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

podemos mostrar que

$$\frac{d}{d\,x}\, e^x = e^x.$$

Sendo a função e^x *estritamente crescente no intervalo* $]-\infty, +\infty[$, *definimos a função inversa* $\log(x) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Segue da proposição 3.1 que, se $y = e^x, x \in \mathbb{R}$,

$$\log'(y) = \frac{1}{e'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$