Exercício 9

a) Temos que resolver a equação $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0$, para $\xi_\mu = (\xi_0, \xi_1)$

$$\partial_0 \xi_0 = 0 \Rightarrow \xi_0 = F(x)$$

$$\partial_1 \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = G(t)$$

$$\partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 = 0 \Rightarrow \dot{G}(t) + F'(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{G}(t) = \sigma = -F'(x), \text{ com } \sigma = \text{cte}.$$

Logo: $G(t) = \sigma t + A$, $F(x) = -\sigma x + B \Rightarrow \xi_0 = -\sigma x + B$, $\xi_1 = \sigma t + A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi_\mu = \sigma(-x, t) + A(0,1) + B(1,0) \Rightarrow \xi^\mu = \sigma(x,t) + A(0,1) - B(1,0).$$

Logo, 3 campos de Killing L.I. são: $\boxed{\xi^\mu_{(1)} = (x,t),\ \xi^\mu_{(2)} = (1,0) \text{ e } \xi^\mu_{(3)} = (0,1)}$

b) Dado um campo de Killing ξ^μ, vimos que a quantidade definida por

$$Q_\xi := \int_\Sigma d\Sigma_\mu T^{\mu\nu} \xi_\nu = \int_{t=\text{cte}} dx\, T^{0\nu} \xi_\nu$$

é conservada se $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Logo

- $\xi^\mu = (1,0)$: $\quad Q_\xi = \int_{t=\text{cte}} dx\, T^{00}(-1) = -\int_{t=\text{cte}} dx\, \rho = -M \rightsquigarrow$ energia/massa total do sistema
- $\xi^\mu = (0,1)$: $\quad Q_\xi = \int_{t=\text{cte}} dx\, T^{01} = \int_{t=\text{cte}} dx\, \pi^x = P \rightsquigarrow$ momentum total do sistema.
- $\xi^\mu = (x,t)$: $\quad Q_\xi = \int_{t=\text{cte}} dx \left[T^{00}(-x) + T^{01} t\right] = -\int_{t=\text{cte}} dx\, x\rho + t\int_{t=\text{cte}} dx\, \pi^x = -M X_{cm}(t) + tP$,

onde $X_{cm} := \frac{1}{M}\int dx\, \rho . x$. Logo: $\boxed{X_{cm}(t) = \frac{P}{M} t - \frac{Q_\xi}{M}}$

Note que a conservação de Q_ξ implica na conservação da velocidade do centro de massa quando combinado com as outras leis de conservação.