DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Estatística Aplicada I
IRI-USP

Junho 2021

Profª. Maria Antonieta Del Tedesco Lins

1

Próximas aulas

2

- Tópicos
  - Distribuição de probabilidades
  - Variáveis aleatórias
    - Variáveis discretas
    - Variáveis contínuas
  - Distribuição binomial
  - Distribuição normal
- Referências

  - Agresti, A. e Finlay, B. Métodos Estatísticos para as Ciências Sociais. 4ªed. Porto Alegre: Penso, 2012, Cap. 4.
  - Barrow, M. Estatística para economia, contabilidade e administração. São Paulo: Ática, 2007, Cap. 3
  - Morettin, P. e W. Bussab. Estatística básica. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005. Cap. 6-7

2

Introdução

3

- A teoria da probabilidade é a base da inferência estatística
  - Isso porque se pode buscar conclusões a partir de uma amostra de dados obtidos ao acaso
- Assim, é possível criar um modelo teórico capaz de reproduzir a distribuição de frequências de um dado fenômeno
- Generalizações dos modelos probabilísticos obtidos a partir de diferentes fenômenos permitem-nos representar todos os tipos de dados que vimos até agora

3

Distribuição de probabilidades

4

- Definição: Uma distribuição de probabilidades enumera os resultados possíveis de um evento probabilístico e a probabilidade associada a eles
- Muito simplesmente, para cada valor de uma variável aleatória discreta, pode-se determinar um valor para a probabilidade de que ele ocorra.
- Listando os valores destas probabilidades temos uma distribuição de probabilidades.

4

Exemplo

5

- Um psicólogo aplicou um teste para classificar o nível de estresse dos 150 funcionários de uma empresa. Para isso, ele atribuiu cinco possibilidades: muito calmo, calmo, moderado, irritado, muito irritado. Essas características foram pontuadas com valores de 1 a 5, onde 1 indica a qualidade "muito calmo" e 5 indica "muito irritado".
- Definindo a variável aleatória X: nível de estresse, podemos dizer que x=1,2,3,4,5.
- Os resultados da pesquisa estão na tabela ao lado

X	Frequência
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21
Total	150

5

Exemplo

6

- Construir uma distribuição de probabilidade para a variável X.
- Calculando as probabilidades:
  - P(X=1) = 24/150 = 0,16
  - P(X=2) = 33/150 = 0,22
  - P(X=3) = 42/150 = 0,28
  - P(X=4) = 30/150 = 0,20
  - P(X=5) = 21/150 = 0,14

6

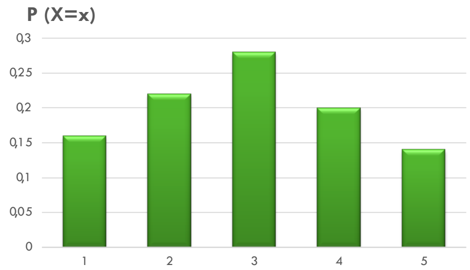
Exemplo

7

A distribuição de probabilidades está apresentada na tabela

x	1	2	3	4	5
P (X=x)	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Graficamente, fica:



7

Distribuição de probabilidades

8

- Uma variável pode assumir, ao menos, dois valores distintos.
- Realizando-se um experimento, cada valor assumido por uma variável tem uma probabilidade de ocorrer.
- Estudamos as distribuições de probabilidade de variáveis discretas ou contínuas.
- Algumas distribuições de probabilidade ocorrem com frequência, são famílias de distribuições.

8

Variáveis aleatórias

9

- É uma variável cujo resultado ou valor decorre do acaso
- São, por exemplo: soma de dois dados, cotação do dólar, precipitação diária de chuva em uma cidade, limite de resistência de uma peça
- Podem ser
  - discretas
  - contínuas
- Notação
  - variáveis aleatórias: X, Y, ... (letras maiúsculas)
  - valores possíveis das variáveis aleatórias: x, y, ... (minúsculas)

9

Variáveis aleatórias discretas

10

- A função que atribui a probabilidade a cada valor possível de uma variável aleatória discreta é denominada distribuição de probabilidade

  f(x) = P(X = x)
- Exemplo
  - Dado honesto: f(x) = 1/6, para x=1, 2, 3, 4, 5 ou 6
  - Como seria f(x) para a soma de dois dados?
- Propriedades

$$f(x) \geq 0 \qquad \sum_{todos\ X} f(x) = 1$$

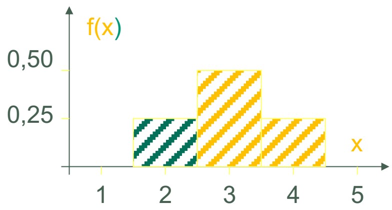
10

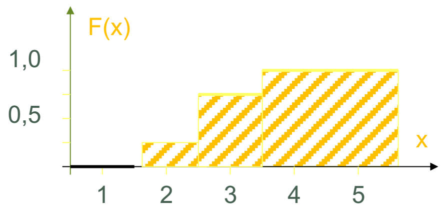
Função distribuição (acumulada)

11

- A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X associa a cada valor possível de X a probabilidade deste valor ser menor ou igual a x. Denota-se F(x)

  $F(x) = P(X \leq x)$





11

Média e variância de uma distribuição calculada pela distribuição de probabilidades

12

Média

$$\mu = \sum_{todos\, x} x.f(x) = E(x)$$

Variância

$$\sigma^2 = \sum_{todos\, x} (x-\mu)^2.f(x)$$

12

Variáveis aleatórias contínuas

13

- Assume valores em intervalo de números reais
- Não é possível listar todos os possíveis valores de uma VA contínua
- Associa-se probabilidades a intervalos de valores da VA contínua
- Uma VA X contínua é caracterizada por sua função densidade de probabilidade f(x) com as propriedades

(i) A área sob a curva de densidade é 1

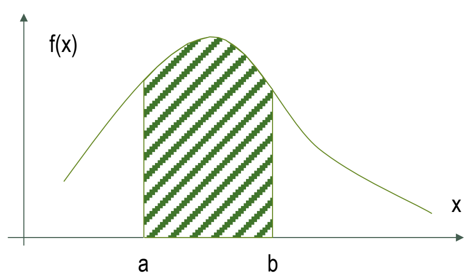
(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade f(x) e acima do eixo x, entre os pontos a e b

13

Variáveis aleatórias contínuas

14

- f(x) = função densidade de probabilidade



$$P(X = x) = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

14

Função de densidade de probabilidade

15

- Relembrando: Em uma variável aleatória contínua o conjunto dos possíveis valores pode ser um intervalo ou um conjunto de intervalos.
- Seja X uma variável aleatória continua. A função de densidade de probabilidade f(x) é uma função que satisfaz as seguintes condições:
  1. $f(x) > 0$ para todo $x \in R_x$

     $$\int_{R_x} f(x) = 1$$

  - Para qualquer $a < b$ em R_x

    $$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

15

Observações

16

1. A probabilidade de qualquer ponto é zero
2. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$.
3. A função integrada entre dois limites a e b ($a < b$) é a probabilidade, ou seja, a área sob a curva.
4. A função de distribuição é definida como

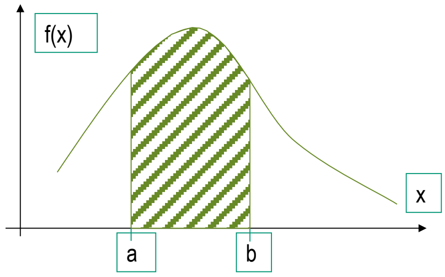
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

16

Variáveis aleatórias contínuas

17

- Propriedades



$$f(x) \geq 0, \ \ \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

17

Média e variância de uma VA contínua

18

Média (ou valor esperado)

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x)dx = E(x)$$

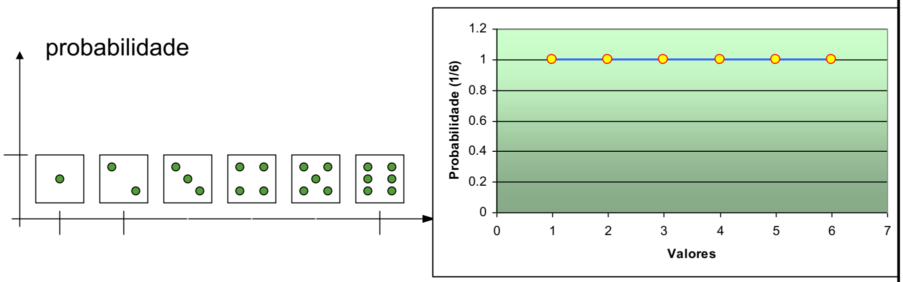
Variância

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

18

Distribuição de probabilidade uniforme ou retangular

19

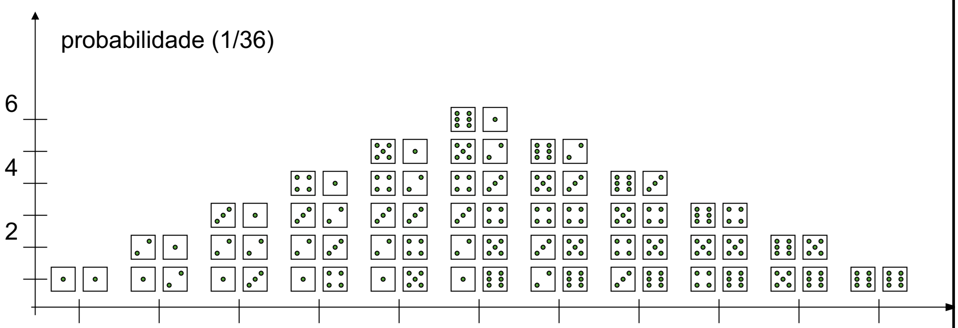


Lançamento de um dado

19

Distribuição de probabilidade triangular

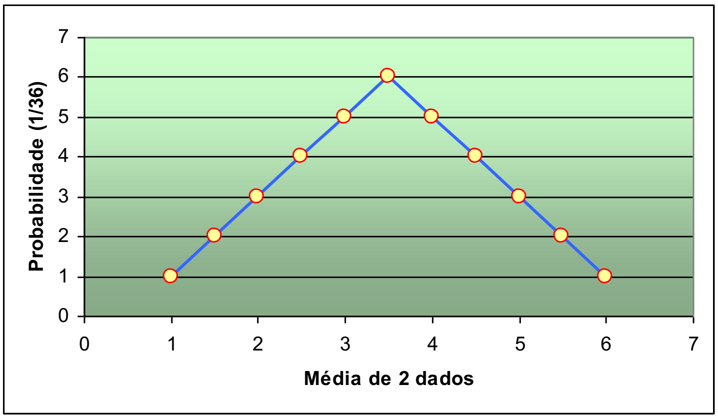
20



Média de dois dados

20

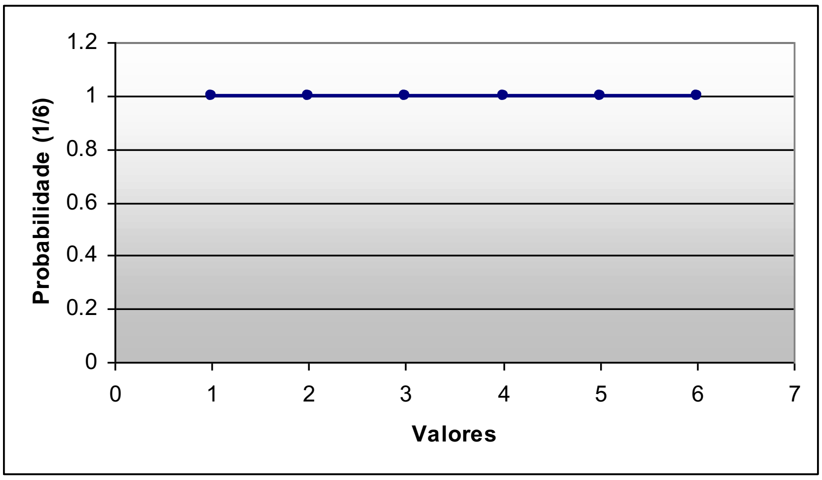
Distribuição de probabilidade triangular



21

21

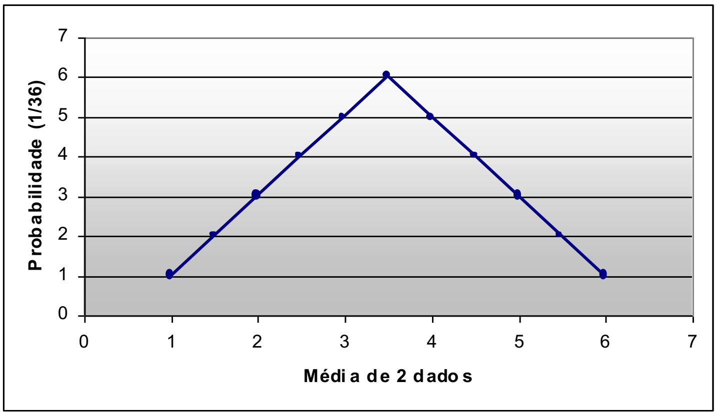
Lançamento de um dado



22

22

Média de dois dados

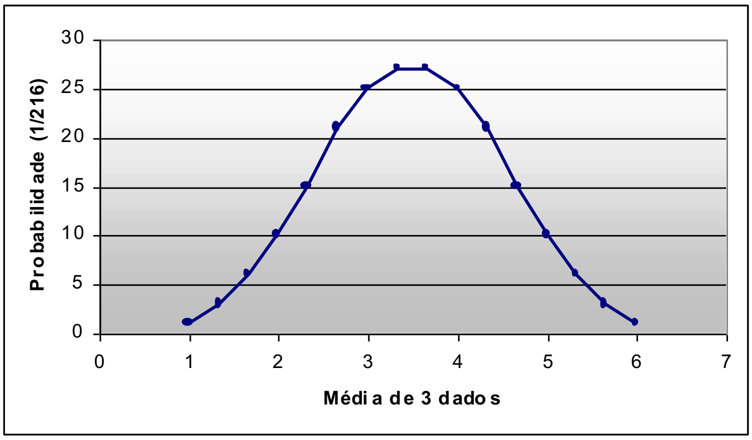


$$p = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

23

23

Média de três dados

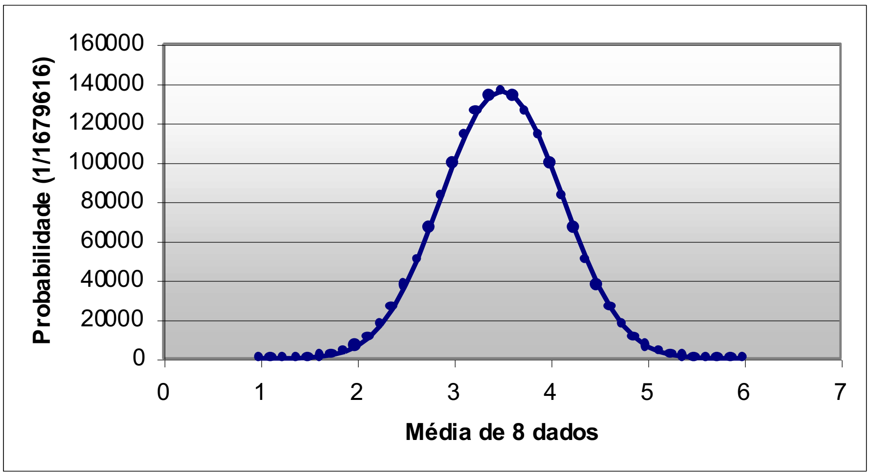


$$p = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

24

24

Média de oito dados



25

25

Distribuição binomial de probabilidade

26

Distribuição binomial

27

- É distribuição discreta de probabilidade. Ela está associada a um experimento de múltiplas etapas

27

Propriedades do experimento binomial

28

- O experimento consiste de uma sequência de n ensaios idênticos
- Dois resultados são possíveis em cada ensaio: sucesso e fracasso
- P(sucesso)=p   P(fracasso)= 1-p = q

  p+ q=1
- Os ensaios são independentes

28

Exemplo: jogar 8 vezes um dado

29

- O experimento consiste em 8 jogadas do dado (ensaios idênticos)
- Cada ensaio resulta em sucesso (sair 6) ou fracasso(não sair 6)
  - P(sucesso)= P(sair 6)=1/6
  - P(fracasso)= P(não sair 6)=5/6
- Os ensaios são independentes

29

30

Exemplo: determinar a probabilidade de saírem 3 faces 6, em 8 jogadas de um dado

Ensaios	1	2	3	4	5	6	7	8
Resultados	s	s	s	f	f	f	f	f
Probabilidade	1/6	1/6	1/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 . \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}17^3 . 0{,}83^5$$

$$= 0{,}0049 . 0{,}3939 = 0{,}0019$$

30

Exemplo lançamento moedas

31

Solução:

- Número de tentativas n=10
- Número de sucessos desejado k=3
- Probabilidade de sucesso em 1 tentativa p=1/2
- Probabilidade de insucesso em 1 tentativa q=1/2
- Usando estes parâmetros na fórmula da distribuição binomial, temos

$$f(X) = P(X=k) = C_{n,k}\, p^k\, q^{n-k}$$

31

Função do Excel

DISTRBINOM (núm_s; tentativas; prob_s; cumulativo)

- A função estatística DISTRBINOM retorna a probabilidade simples ou acumulada do número de tentativas bem-sucedidas núm_s, conforme o valor do argumento cumulativo.
  - Se o argumento cumulativo for **FALSO**, a função retornará a probabilidade do número **exato** de sucessos **núm_s**
  - Se o argumento cumulativo for **VERDADEIRO**, a função retornará a probabilidade **acumulada** desde o valor **0** até o valor **núm_s** informado.

32

32

Exemplo lançamento moedas (resolução com Excel)

Solução:

Se X é a variável aleatória que representa "o número de caras" então

Se quisermos calcular a probabilidade de sair três caras em dez lançamentos

P(X=3)= distrbinom(3 ; 10 ; 0,5 ; 0)= 0,1172

33

33

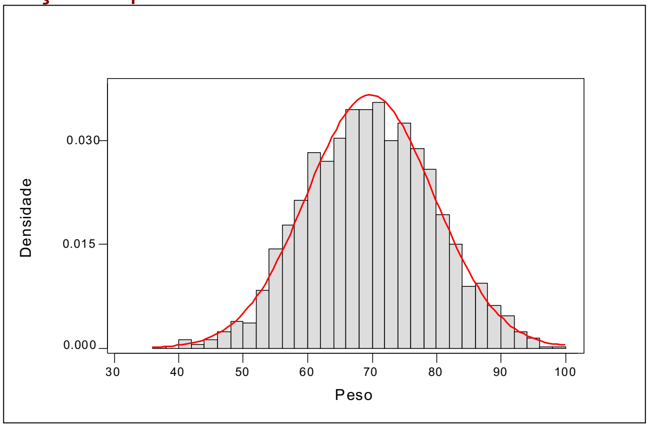
Distribuição normal

34

Vamos definir a variável aleatória

X: peso, em kg, de uma pessoa adulta escolhida ao acaso da população.

Como se distribuem os valores da variável aleatória X, isto é, qual a distribuição de probabilidades de X ?



35

A curva contínua da figura denomina-se curva normal.

35

A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições contínuas de probabilidade pois:

Muitos fenômenos aleatórios comportam-se de forma próxima a essa distribuição. Exemplos:

1. altura
2. pressão sangüínea
3. peso

Pode ser utilizada para calcular, de forma aproximada, probabilidades para outras distribuições, como por exemplo, para a distribuição binomial.

36

36

A distribuição normal

A VA X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Pode ser mostrado que

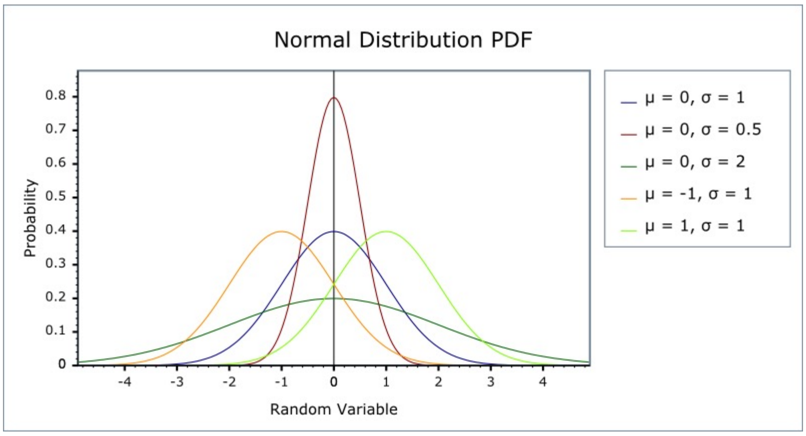
1. μ é o valor esperado (média) de X ($-\infty < \mu < \infty$)
2. σ^2 é a variância de X ($\sigma^2 > 0$)

Notação : $X \sim N(\mu ; \sigma^2)$

Para cada par de parâmetros μ e σ
há uma curva diferente de f(x)
Há uma "família" de distribuições normais

37

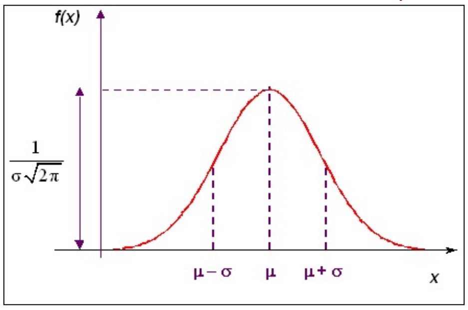
37



38

38

Propriedades de $X \sim N(\mu;\sigma^2)$

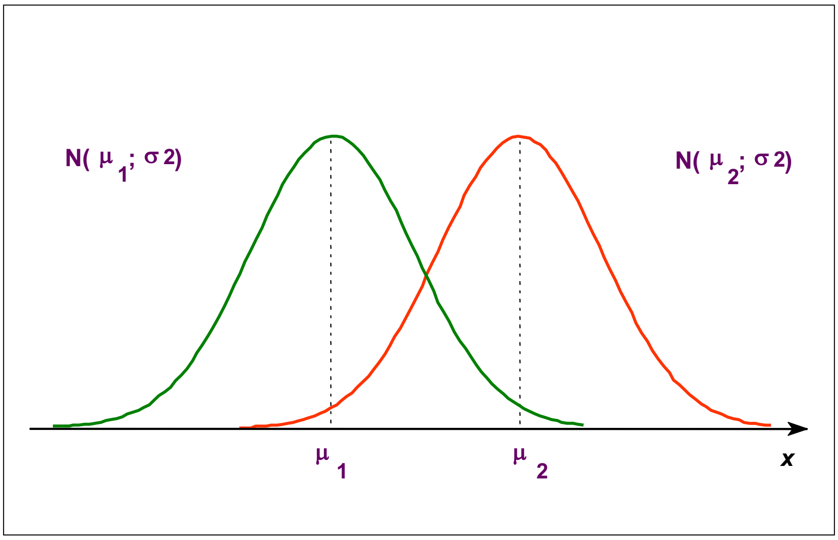


- $E(X) = \mu$ **(média ou valor esperado)**
- $Var(X) = \sigma^2$ **(e portanto,** $DP(X) = \sigma$ **)**
- $f(x) \to 0$ **quando** $x \to \pm\infty$
- $x = \mu$ **é ponto de máximo de** $f(x)$
- $\mu - \sigma$ **e** $\mu + \sigma$ **são pontos de inflexão de** $f(x)$
- **a curva Normal é simétrica em torno da média** μ

39

39

A distribuição normal depende dos parâmetros μ e σ^2

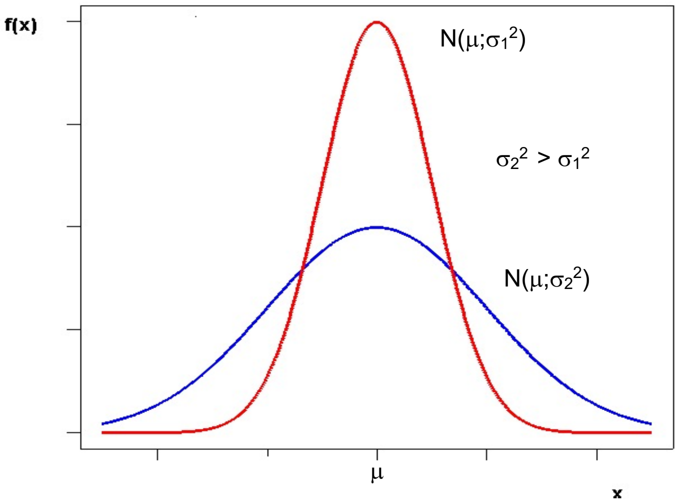


Curvas Normais com mesma variância σ^2
mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

40

40

Influência de σ^2 na curva Normal



Curvas Normais com mesma média μ,
mas com variâncias diferentes **($\sigma_2^2 > \sigma_1^2$).**

41

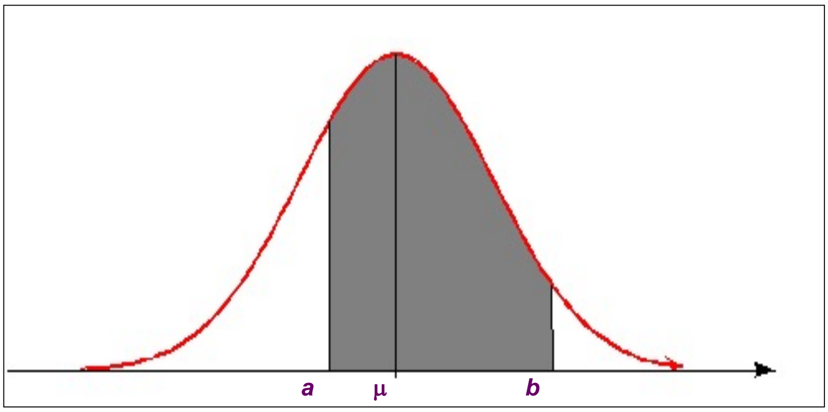
41

Cálculo de probabilidades

P($a < X < b$)

⬇

Área sob a curva e acima do eixo horizontal (*x*) entre *a* e *b*.



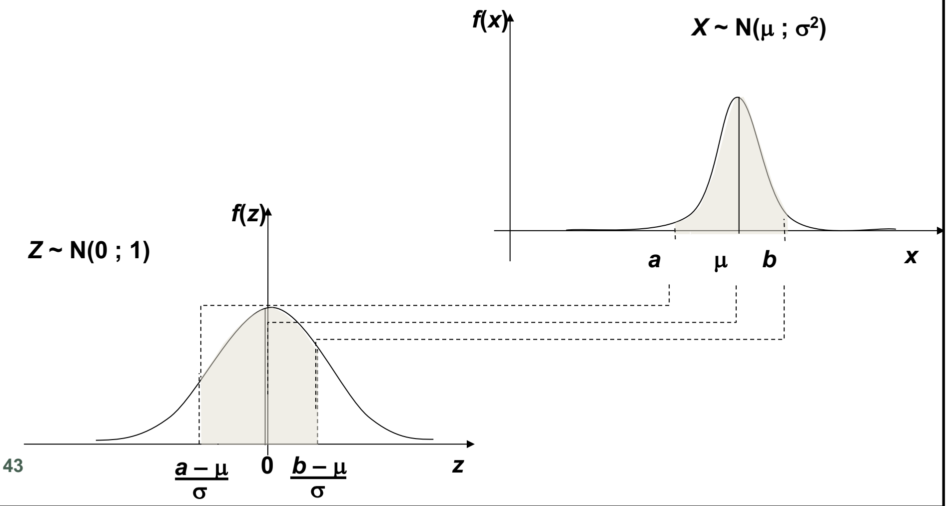
42

42

Se $X \sim N(\mu\,;\sigma^2)$, definimos $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

$\Rightarrow$ $E(Z) = 0$

$Var(Z) = 1$



43

43

A v.a. $Z \sim N(0;1)$ denomina-se *normal padrão* ou *reduzida.*

Portanto,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

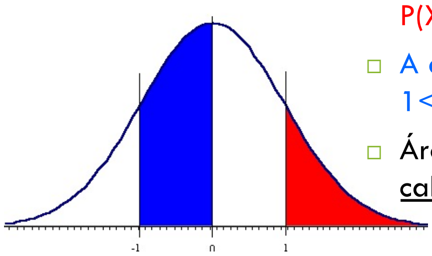
Dada a v.a. $Z \sim N(0;1)$ podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ através da transformação inversa

$$X = \mu + Z\,\sigma.$$

44

44

Para variáveis aleatórias contínuas, **as probabilidades são representadas pelas áreas sob a curva**



- Área total sob a curva é 1
- A área em vermelho é igual a P(X>1)
- A área em azul é igual a P(-1<X<0)
- Áreas são obtidas em tabelas ou calculadas em computador

45

Distribuição normal

P(z_1=1,02)=?

TABLE 4.3 Probability Values for Normal Error Function

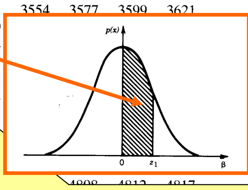
One-Sided Integral Solutions for $p(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{z_1} e^{-\beta^2/2}\, d\beta$

Segunda decimal de Z

Parte inteira e primeira decimal de Z

$z_1 = \frac{x_1 - x'}{\sigma}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	[illegible]	[illegible]	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	[illegible]	[illegible]	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	[illegible]	[illegible]	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	[illegible]	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3233
0.9	.3159	.3186	[illegible]	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	[illegible]	[illegible]	.3729	.3749	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.2	.3849	.3869	.3888	[illegible]	.3925	.3944	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.3	.4032	.4049	.4066	[illegible]	.4099	.4115	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	[illegible]	.4265	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	[illegible]	.4394	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990

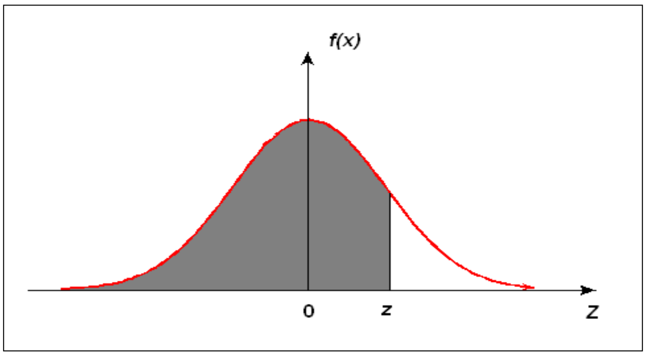
Z_1=1,02



P(z_1=1,02)=34,61%

46

Uso da tabela normal padrão



Denotamos : A(z) = P(Z ≤ z), para *z* ≥ 0.

47

47

Distribuição Normal : Valores de P(Z ≤ z) = A(z)

Segunda decimal de z

Parte inteira e primeira decimal de Z

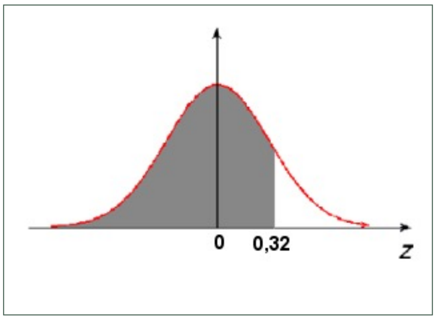
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

48

48

Exemplo: Seja $Z \sim N(0;\ 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$



$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$

49

49

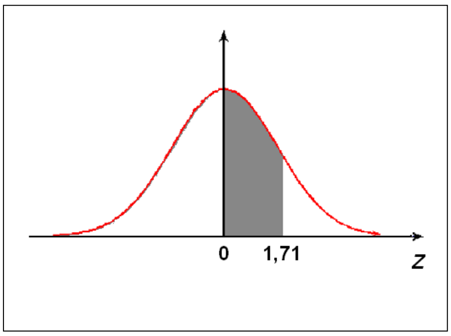
Encontrando o valor na Tabela N(0;1)

z	0	1	2
0,0	0,5000	0,5039	0,5079
0,1	0,5398	0,5437	0,5477
0,2	0,5792	0,5831	0,5870
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
⋮	⋮	⋮	⋮

50

50

b) P(0 < $Z \leq$ 1,71)



$P(0 < Z \leq 1{,}71) = P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}71) - A(0)$

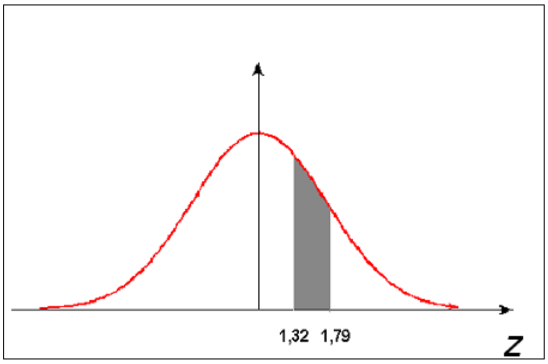
$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$

Obs.: $P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0{,}5.$

51

51

c) P(1,32 < $Z \leq$ 1,79)



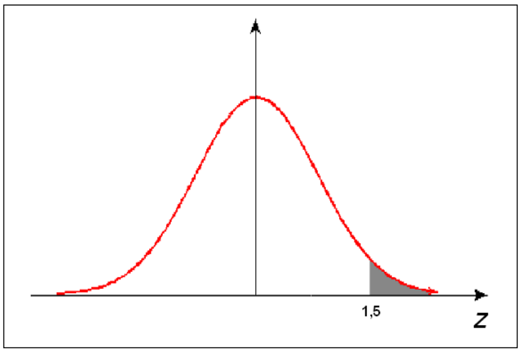
$P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79) = P(Z \leq 1{,}79) - P(Z \leq 1{,}32) = A(1{,}79) - A(1{,}32)$

$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567.$

52

52

d) $P(Z \geq 1,5)$



$P(Z > 1,5) = 1 – P(Z \leq 1,5) = 1 – A(1,5)$

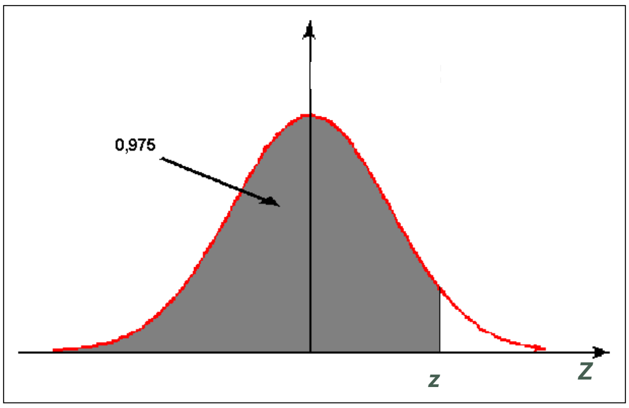
$= 1 – 0,9332 = 0,0668.$

53

53

Como encontrar o valor *z* da distribuição N(0;1) tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0,975$



z é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.

54

54

Exercício

55

- Um marinheiro recebe um telegrama avisando que sua esposa deu à luz naquele dia, 308 dias após sua última visita. Sendo que os prazos de gravidez têm distribuição normal com média de 268 dias e desvio padrão de 15 dias, pergunta-se: o marinheiro deve se preocupar...?

55

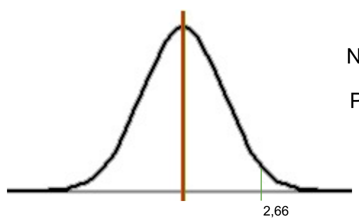
Solução

56

- X V.A. : tempo de gravidez, em dias

  $X \sim N(\mu\ ;\ \sigma^2)$ $X \sim N(268\ ;\ 15^2)$

- P(X>308)=? $P(Z>\frac{308-268}{15})$=? P(X>2,666)=?



Na tabela z=2,66 → A=0,9961

P(X>2,666)=? 1-0,9961=,0039 ou 0,39%

56

Exercício

57

- Em um certo teste de aptidão para contratação de determinada empresa, os candidatos devem realizar uma sequência de tarefas no menor tempo possível. Suponhamos que o tempo necessário para completar esse teste tenha uma distribuição Normal com média 45 minutos e desvio-padrão de 20 minutos. Suponhamos que, numa primeira etapa, esse teste foi aplicado com uma amostra de 50 candidatos. Qual a probabilidade de encontrarmos algum candidato que tenha um tempo superior a 50 minutos (candidato muito lento) ou inferior a 30 minutos (que seria impossível completar o teste)? Qual o número aproximado de candidatos com tal perfil?

57

Solução

58

- Inicialmente, seja X uma variável que indique o tempo de execução das tarefas tal que $X \sim N(45, 20^2)$. Desejamos calcular:

$$P(X > 50) + P(X < 35) =$$

$$P(Z<\frac{50-45}{20}) + P(Z>\frac{30-45}{20}) = ?$$

$$(0,5 - 0,0987) + (0,5 - 0,2734) =$$

$$= 0,6279 \text{ ou } 62,79\%$$

Como 0,6279 . 50 = 31,39, temos que o número de pessoas aproximado que contenham tais característica é de 32 pessoas. Então, nesse teste a empresa já exclui 32 candidatos, restando apenas 18 para continuarem no processo de seleção.

58

Material online

59

- http://professorguru.com.br/estatistica/distribuicoes-de-probabilidade/distribuicao-normal-de-probabilidades.html

59