PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 17 e 18 - 2021

PTC-EPUSP

Modelos Exponenciais

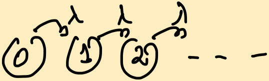
Modelos exponenciais podem ser caracterizados da seguinte maneira:

A) São especificados, em qualquer instante t, pela variável de estado $X(t) = i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, ou $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$

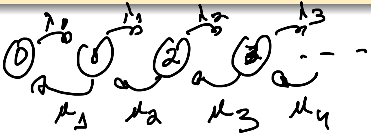
B) Transições entre estados ocorrem segundo uma variável exponencial com parâmetro λ_i quando $X(t) = i$

Exemplos:

1) Processos de Poisson



2) Processos de Nascimento e Morte



$\underline{G|G|1}$

$\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu} \iff \frac{\lambda}{\mu} < 1$ condição de equilíbrio

Sistemas de Fila Exponencial com 1 Servidor - M/M/1

Chegadas em uma ocorrem de acordo com 1 processo de Poisson com taxa de chegada $\lambda > 0$. O tempo de atendimento para cada cliente ocorre segundo uma variável exponencial com média $\frac{1}{\mu}$. Os tempos entre chegadas e de atendimento são todas variáveis aleatórias independentes.

Queremos calcular os seguintes parâmetros:

A) L - número médio de clientes no sistema.

B) L_Q - número médio de clientes ~~no sistema~~. na fila

C) W - tempo médio de espera do cliente no sistema.

D) W_Q - tempo médio de espera do cliente na fila.

$P_0 \to$ % tempo ocioso

Fila M/M/1

Definimos:

A) $X(t)$ - número de clientes no sistema no instante t.

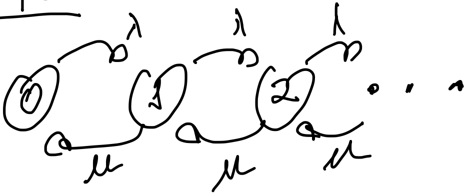
B) $X(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

C) $P_n(t) = P(X(t) = n)$ - probabilidade de se ter n clientes no sistema no instante t.

D) $P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$ (vai existir quando a condição de equilíbrio for satisfeita).

E) P_n - também representa a proporção do tempo que o sistema fica no estado n.

M|M|1 :



$T_c \to$ tempo entre chegadas $\Rightarrow E(T_c) = \frac{1}{\lambda}$

$T_s \to$ tempo de serviço $\Rightarrow E(T_s) = \frac{1}{\mu}$

Intuitivamente, a condição de equilíbrio é:

$$\frac{1}{\mu} < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\Rightarrow L(t) = E(X(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P(X(t)=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P_i(t)$$

$$L = \lim_{t\to\infty} L(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} i\, P_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i \underbrace{\lim_{t\to\infty} P_i(t)}_{P_i} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P_i$$

Fila M/M/1

Temos que

A) $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

B) $L_Q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n$ (n clientes no sistema $\rightarrow$ $(n-1)$ clientes na fila)

C) $W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\mu} P_n$

D) $W_Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} P_n$

T = tempo gasto no sistema por um cliente

$$W(t) = E(T) = E\Big(\underbrace{E(T \mid X(t))}_{\frac{X(t)+1}{\mu}}\Big)$$

$$L_Q(t) = E\left(\left(X(t)-1\right)^+\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)\, P_i(t)$$

$$L_Q = \lim_{t\to\infty} L_Q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)\, P_i$$

tempo de serviço da pessoa que está (esperando)

$$\rightarrow E\left(T \mid X(t)=n\right) = \frac{n-1 \text{ na fila}}{1 \text{ no serviço}} \quad \underbrace{\frac{1}{\mu}}_{T_R} + \frac{n-1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{n+1}{\mu}$$

para T_R não entra essa componente

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{\mu}\right) P_n(t)$$

$$W = \lim_{t \to \infty} W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{\mu} \right) P_n$$

T_Q = tempo gasto na fila

$$W_Q(t) = E\big(T_Q \mid X(t) = n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} P_n(t)$$

Logo

$$W_Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} P_n$$

$$\boxed{W = W_Q + \frac{1}{\mu}}$$

W_Q

Da fórmula: $W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\mu} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} P_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} P_n$

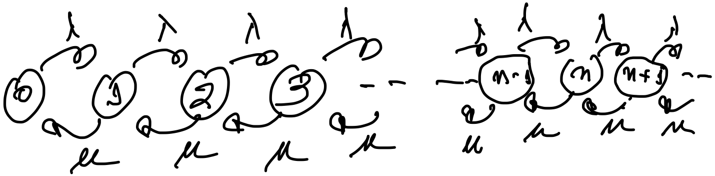
$$W = W_Q + \frac{1}{\mu}\overbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n\right)}^{=1} = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

Fila M/M/1

Cálculo de P_n pelas equações de balanço:

taxa de saída do estado n = taxa de entrada no estado n

1. $n = 0$: $\lambda P_0 = \mu P_1$
2. $n \geq 1$: $(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$



$$\text{sai} = \text{entra}$$

Estado 0 : $\lambda P_0 = \mu P_1$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1}$$

Estado 1 : $(\lambda+\mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$

$\vdots$

Estado n : $(\lambda+\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$

Resolvendo o sistema :

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \overbrace{\left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}\right)}^{=0}$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \cancelto{0}{\left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 \right)} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) P_2 + \cancelto{0}{\left(P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1 \right)} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{1}{1 - \lambda/\mu}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \frac{1}{1-\lambda/\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad , \quad P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\qquad \right)$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Condição de equilíbrio:</u>

$$0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}_{p}$$

<u>Valor esperado de uma geométrica com parâmetro p</u>

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{1}{p}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \qquad \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Fila M/M/1

Condição de Equilíbrio:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Solução: para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Fila M/M/1

Cálculo de L, L_Q, W, W_Q:

$$
\left\{
\begin{aligned}
L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\
L_Q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \\
W &= \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \text{(note que } \underline{L = \lambda W}\text{)} \\
W_Q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad \text{(note que } \underline{L_Q = \lambda W_Q}\text{)}
\end{aligned}
\right.
$$

$$L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n P_n}^{L} - \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P_n}^{1-P_0}$$

$$= L - (1-P_0) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda\cancel{\mu} - \lambda(\cancel{\mu}-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{\mu} P_n = \frac{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}^{L}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P_n}^{1}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\cancel{\lambda} + \cancel{\mu} - \cancel{\lambda}}{\cancel{\mu}(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \text{(dimensão de Tempo)}$$

$$L = \lambda W$$

$$\frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \lambda \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\cancel{\mu} - (\cancel{\mu}-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

dimensão de tempo.

$$L_Q = \lambda \quad W_Q$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \lambda \quad \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Caso 1: $\frac{1}{\lambda} = 12$ min, $\frac{1}{\mu} = 8$ min.

a) Qual é a taxa de ociosidade?

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3} \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

condição de equilíbrio satisfeita

b) Qual é o número médio de clientes no sistema e fila?

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1/12}{1/8 - 1/12} = \frac{1}{3/2 - 1} = 2$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(1/12)^2}{(1/8)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)} = \frac{4}{3}$$

Fila M/M/1 - Exemplo

Calcule L, L_Q, W, W_Q para o caso

$$\lambda = \frac{1}{12} \text{ por minuto}, \quad \mu = \frac{1}{8} \text{ por minuto}$$

O que acontece se temos um aumento de 20% na taxa de chegada λ?

c) Qual é o tempo médio gasto no sistema e na fila?

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1/8 - 1/12} = \frac{12 \cdot 8}{12 - 8} = 24 \text{ min}$$

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} = 24 - 8 = 16 \text{ min}$$

$$L = \lambda W = \frac{1}{12} 24 = 2$$

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{1}{12} 16 = \frac{4}{3}$$

λ aumenta em 20% $\Rightarrow$ $\lambda = 1{,}2 \frac{1}{12} = \frac{1}{10}$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} < 1 \quad \text{OK}$$

a) $P_0 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 20\%$ ✓ $(1/3)$

c) $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{8} - \frac{1}{10}} = \frac{10 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = 40 \text{ min}$ ↑ $(2/4)$

$W_Q = W - \frac{1}{\cancel{\mu}} = 40 - 8 = 32 \text{ min}$ ↑ (16)

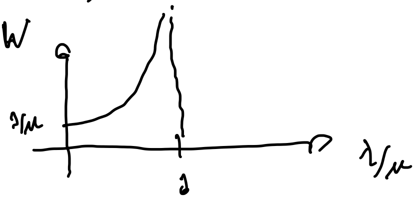
b) $L = \lambda W = \frac{1}{10} 40 = 4$ ✓ (2)

$L_Q = \lambda W_Q = \frac{1}{10} \cdot 32 = 3{,}2$ ↑ $(4/3)$

É fácil verificar que

$$\lim_{\frac{\lambda}{\mu} \to 1} \left(W = \frac{1/\mu}{1-\lambda/\mu} \right) = \infty$$

$$\lim_{\frac{\lambda}{\mu} \to \infty} \left(L = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} \right) = \infty$$



Fila M/M/1 - Exemplo

Pacientes chegam a um pronto socorro de acordo com um processo de Poisson com média de $\frac{1}{\lambda} = 12$ minutos. Qual deve ser o tempo médio de atendimento $\frac{1}{\mu}$ para que o tempo médio de espera na fila seja de 10 minutos?

$\lambda = \frac{1}{12} / \text{min}$ $\qquad W_Q = 10$ mins

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \Rightarrow \underline{10} = \frac{1/12}{\mu(\mu-1/12)}$$

$$\mu^2 - \frac{1}{12}\mu = \frac{1}{120} \Rightarrow$$

$$\mu^2 - \frac{1}{12}\mu - \frac{1}{120} = 0$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{12^2} + \frac{4}{120}\ {}^{1}/_{30}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{12} \overset{+}{\cancel{-}} \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{30}}}{2} \qquad 0,2$$

$$= 0,142$$

Logo, $\frac{1}{\mu} \cong \underline{\underline{7{,}04}}$ mins.

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{7{,}04}{12} = 0{,}566$$

$$L_Q = \frac{1}{12} \cdot \overset{10}{W_Q} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$W = W_Q + \frac{1}{\mu} = \underbrace{17{,}04}_{\text{mins}}$, $L = \lambda W = \frac{1}{12} \cdot 17{,}04 = \underline{1{,}42}$

Fila M/M/1 - Exemplo

O gerente de um mercado pode contratar Maria ou Alice. Maria, que presta serviço a uma taxa exponencial de 20 clientes por hora, pode ser contratada a uma taxa de 3 dólares por hora. Alice, que presta serviço a uma taxa exponencial de 30 clientes por hora, pode ser contratada a uma taxa de C dólares por hora. O gerente estima que, em média, o tempo de cada cliente vale 1 dólar por hora e deve ser contabilizado no modelo. Suponha que os clientes cheguem a uma taxa de Poisson de 10 por hora.

(A) Qual é o custo médio por hora se Maria for contratada? E se Alice for contratada?

(B) Para que valor de C os custos médios por hora da Maria e da Alice seriam iguais?

$\rightarrow \mu_M = 20/h$, $\mu_A = 30/h$ Custo espera \$1/h

custo: \$3/h , Custo: \$ c/h $\lambda = 10/h$

a) C_M = Custo médio Maria /h $\Rightarrow C_M = 3 + 1 . L_M$

C_A = " " Alice /h $\Rightarrow C_A = c + 1 . L_A$

$$L_M = \frac{\lambda}{\mu_M - \lambda} = \frac{10}{20-10} = 1$$

$$L_A = \frac{\lambda}{\mu_A - \lambda} = \frac{10}{30-10} = 1/2$$

$C_M = \$4/h$

$C_A = \$(c + 1/2)/h$

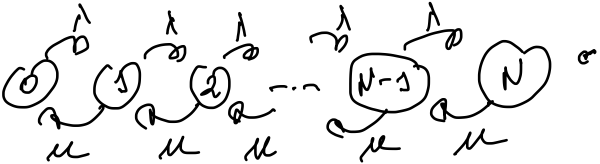
b) $C + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow C = \$ 3{,}5 / h$

$C > 3{,}5 \Rightarrow$ Contrata Maria

$C < 3{,}5 \Rightarrow$ Contrata Alice

Fila M/M/1/N

Consideramos no modelo anterior que não havia limite no número de clientes que poderiam entrar no sistema em qualquer instante de tempo t. Entretanto, em modelos reais, existiria uma capacidade máxima de N clientes no sistema, isto é, não poderia haver mais do que N clientes no sistema. Se um novo cliente chegar e encontrar N pessoas no sistema, então este cliente não entra e é perdido.



$$P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t) \quad , \quad P_n(t) = P(X(t) = n)$$

Fila M/M/1/N

taxa de saída do estado n = taxa de entrada no estado n

1. $n = 0$: $\lambda P_0 = \mu P_1$
2. $n \geq 1$: $(\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$
3. $n = N$: $\mu P_N = \lambda P_{N-1}$

	Sai	=	Entra
Estado 0	λP_0	=	μP_1
Estado $n \geq 1$	$(\lambda+\mu) P_n$	=	$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$
Estado N	μP_N	=	λP_{N-1}

$P_0 + \cdots + P_N = 1$

Fila M/M/1/N

Solução para $\lambda \neq \mu$:

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda + \cancel{\mu}) P_1 = \cancel{\lambda P_0} + \mu P_2 \Rightarrow \lambda P_1 = \mu P_2$$

$$(\lambda + \cancel{\mu}) P_2 = \cancel{\lambda P_1} + \mu P_3 \Rightarrow \lambda P_2 = \mu P_3$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\cancel{\mu} P_N = \lambda P_{N-1} \qquad \Rightarrow \lambda P_{N-1} = \mu P_N$$

Logo, $P_{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_n \Rightarrow \boxed{P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}$

$n = 0, \dots, N$

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = P_0 \left[\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] = 1$$

Vamos considerar o caso $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1 - \lambda/\mu} \Rightarrow P_0 = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

Em geral, $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \left[\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}\right]$

$n = 0, \ldots, N$

$$L = \sum_{n=0}^{N} n P_n \qquad W = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

Fila M/M/1/N

Solução para $\lambda \neq \mu$:

$$L = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \frac{(1-\frac{\lambda}{\mu})}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \boxed{\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$= \frac{\lambda(1+N(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}-(N+1)(\frac{\lambda}{\mu})^N)}{(\mu-\lambda)(1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1})}$$

$$\overset{\lambda}{N(t)} = \overset{\lambda(1-P_N)}{N_E(t)} + \overset{\lambda P_N}{N_{\bar{E}}(t)}$$

$N_E(t)$ → pessoas que entram $(1-P_N)$

$N_{\bar{E}}(t)$ → pessoas que não entram P_N

$$\lambda_a = \lambda(1-P_N)$$

$$L = \lambda_a W \Rightarrow W = \frac{L}{\lambda(1-P_N)}$$

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} \quad , \quad \underline{L_Q = \lambda(1-P_N) W_Q}$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q$$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow$ intensidade do tráfico

$P_N \rightarrow$ % de chegadas bloqueadas

$$P_N = \frac{\rho^N (1-\rho)}{1-\rho^{N+1}}$$

Considere $\lambda = 1/\text{min}$

Taxa de processamento: μ

com custo $C\mu$

Capacidade $= N$

M|M|1|N

$P_N \leq 0,1$ (10%)

Fila M/M/1/N

Solução para $\lambda \neq \mu$:

$$W = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(n+1)P_n}{\mu(1-P_N)} = \frac{L-(N+1)P_N+1}{\mu(1-P_N)}$$

No cálculo acima não incluímos o tempo zero dos clientes que encontram o sistema lotado e vão embora imediatamente.

Três possibilidades para μ:

1. $\mu_1 = 0,5/\text{min}$ com $C_{\mu_1} = 100$
2. $\mu_2 = 1,2/\text{min}$ com $C_{\mu_2} = 300$
3. $\mu_3 = 2/\text{min}$ com $C_{\mu_3} = 500$

Custo de espaço na fila é 80

$\min f(\mu, N)$

$f(\mu, N) = C_\mu + 80N$

(1) $\rho_1 = \frac{1}{\mu_1} = 2 \Rightarrow P_N = \frac{2^N(1-2)}{1-2^{N+1}} \leq 0,1$

$\frac{2^N}{2^{N+1}-1} \leq 0,1 \Rightarrow 2^N \leq 0,1(2^{N+1}-1) \Rightarrow$

$\underbrace{2^N \underbrace{(1-0,2)}_{0,8}}_{\text{positivo}} \cancel{\leq} \underbrace{-0,1}_{\text{negativo}}$ não tem solução!

(2) $\rho_2 = \frac{1}{1,2} = 5/6 \Rightarrow P_N = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^N \overbrace{\left(1-\frac{5}{6}\right)}^{1/6}}{1-(5/6)^{N+1}} \leq 0,1 \Rightarrow$ $\frac{1-5/6}{1} = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^N\left(\frac{1}{6}\right) \leq 0,1 - 0,1 \cdot \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^N \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^N\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{60}\right) \leq 0,1$

$\left(\frac{0,5}{6}\right)^N \leq 0,4 \Rightarrow N > 5,025 \quad N=6 \Rightarrow f(\mu_2,6) = \boxed{300+80\cdot 6}$ 780

$P_6 = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^6 \Big/ 1-\left(5/6\right)^7 = 7,74\%$

(3) $\rho_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow N=3 \Rightarrow P_3 = 6,67\%, \quad f(\mu_3,3) = 740$
exercício

Solução ótima!

Exercício! Calcule L_3, W_3, W_{Q3}, L_{Q3} para o caso 3.

A Relação $L = \lambda_a W$ e $L_Q = \lambda_a W_Q$

Vimos no modelo M/M/1 que vale a relação

$$L = \lambda W, \quad L_Q = \lambda W_Q$$

isto é, o número médio de clientes no sistema é igual à taxa média de chegada multiplicado pelo tempo médio de espera no sistema e, similarmente, o número médio de clientes na fila é igual à taxa média de chegada multiplicado pelo tempo médio de espera na fila. Nesse caso $\lambda_a = \lambda$.

A Relação $L = \lambda_a W$ e $L_Q = \lambda_a W_Q$

Definindo λ_a como sendo a taxa média de chegada, temos que a seguinte equação geral é válida para modelos de filas:

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q$$

A RELAÇÃO $L = \lambda_a W$ E $L_Q = \lambda_a W_Q$

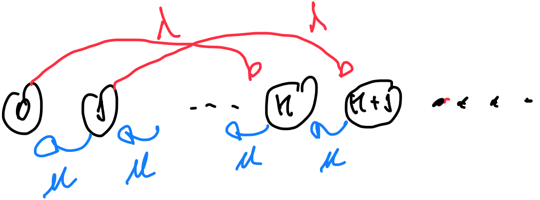
Mostre que no modelo $M/M/1/N$ temos que

$$L = \lambda_a W$$

onde

$$\lambda_a = \lambda(1 - P_N).$$

Chegadas em bateladas de K pessoas



Então calcular P_n

$$\boxed{\lambda_a = \lambda . K}$$

4 incógnitas: L, L_Q, W, W_Q

$$\left.\begin{aligned} L &= \lambda K W \\ L_Q &= \lambda K W_Q \\ W &= W_Q + \frac{1}{\mu} \end{aligned}\right\} \text{3 equações}$$

Falta 1 equação L e W

Condição de equilíbrio $\frac{\lambda K}{\mu} < 1$

Chegadas em Bateladas de K

Considere um modelo de filas com 1 servidor tal que chegadas ocorrem de acordo com um Processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$ mas que, cada chegada, corresponde a K clientes. Mostre que a condição de equilíbrio é $\frac{\lambda K}{\mu} < 1$ e

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \frac{K+1}{2(\mu - \lambda K)} \\ L &= \lambda K W = \frac{\lambda K(K+1)}{2(\mu - \lambda K)} \\ W_Q &= W - \frac{1}{\mu} = \frac{K+1}{2(\mu - \lambda K)} - \frac{1}{\mu} \\ L_Q &= \lambda K W_Q = \frac{\lambda K(K+1)}{2(\mu - \lambda K)} - \frac{\lambda K}{\mu} \end{aligned} \right.$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \quad , \quad W = E\left(\{E(T \mid X)\}\right)$$

$$E(T \mid X = n)$$ → Tempo médio no sistema dado que encontra n pessoas na chegada

$$E(T / X = n) = \frac{1}{\mu} + \frac{n-1}{\mu} + E(T_B) \quad \frac{M+1}{2\mu}$$

pessoa sendo atendida

$n-1$ pessoas na fila

$$= \frac{n}{\mu} + \frac{M+1}{2\mu}$$

$$E(T_B) = \sum_{j=1}^{M} \frac{j}{\mu} \frac{1}{M} = \frac{1}{\mu \cancel{M}} \left(\frac{1+M}{2} \right) \cdot \cancel{M} = \frac{M+1}{2\mu}$$

$$\sum_{j=1}^{M} j = \frac{(1+M)M}{2}$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{\mu} + \frac{r+1}{2\mu} \right) P_n$$

$$= \frac{1}{\mu} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}_{L} + \frac{(r+1)}{2\mu} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n}_{=1}$$

$$W = \frac{1}{\mu} \left\{ L + \frac{r+1}{2} \right\} = \frac{1}{\mu} \left\{ \lambda r W + \frac{r+1}{2} \right\}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda r}{\mu}\right) W = \frac{r+1}{2\mu} \Rightarrow W = \frac{r+1}{2(\mu - \lambda r)}$$

$r = 1$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$L = \lambda r W = \frac{\lambda r (r+1)}{2(\mu - \lambda r)}$$

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{K+1}{2(\mu-\lambda K)} - \frac{1}{\mu}$$

$$L_Q = \lambda K\, W_Q = \frac{\lambda K(K+1)}{2(\mu-\lambda K)} - \frac{\lambda K}{\mu}$$

Chegadas em Bateladas de K

Calcule W, L, W_Q, L_Q para o caso

$$K = 2,\ \frac{1}{\lambda} = 10 \text{ minutos}\ ,\ \frac{1}{\mu} = 4 \text{ minutos}\ .$$

Condição de Equilíbrio: $\frac{\lambda K}{\mu} = \frac{2/10}{1/4} = \frac{4}{5} < 1$ OK

$$W = \frac{2+1}{2\left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{2\left(\frac{5-4}{20}\right)} = 30 \text{ min}$$

$$1/5$$

$$L = \lambda_H W = \frac{2}{10} \cdot 30 = 6$$

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} = 30 - 4 = 26 \text{ min.}$$

$$L_Q = \lambda_H W_Q = \frac{1}{5} \cdot 26 = 5{,}2.$$