Fundo Patrimonial FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 7 - Aplicação: Modelos econômicos de Leontief

Objetivos dessa aula:

Em 1973, o economista Wassily Leontief foi agraciado com o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia. Nesta aula, discutiremos algumas das ideias desenvolvidas por Leontief.

1. ANÁLISE DE INSUMO-PRODUTO

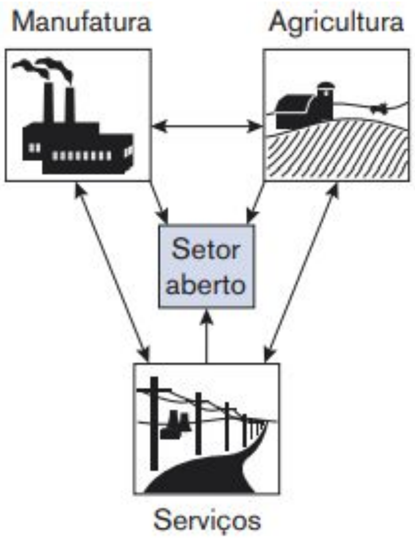
- Uma maneira de analisar uma economia é dividi-la em **setores** e estudar como os setores interagem entre si. Tipicamente, um setor produz certos **produtos**, mas requer **insumos** de outros setores e de si mesmo. Assim, podemos imaginar uma economia como uma rede na qual fluem os insumos e os produtos entre os setores.

- O estudo desses fluxos é denominado **análise de insumo-produto**.

- Os insumos e produtos em geral são medidos em unidades monetárias (denotamos apenas pelo cifrão $), mas também são possíveis outras medidas.

- Os setores de uma economia que não produzem bem e produtos são chamados **setores abertos**.

- Economias sem setores abertos são chamadas **economias fechadas**, e economias com setores abertos são chamadas **economias abertas**.



Exemplo 1. Consideremos uma economia aberta simples com um setor aberto e três setores produtivos: manufatura, agricultura e serviços. Suponhamos que os insumos e produtos sejam medidos em $ e que os insumos requeridos pelos setores produtivos para produzir uma unidade monetária de valor de produto estão de acordo com a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1

		Insumo requerido para produzir $1		
		Manufatura	Agricultura	Serviços
Fornecedor	Manufatura	$ 0,50	$ 0,10	$ 0,10
	Agricultura	$ 0,20	$ 0,50	$ 0,30
	Serviços	$ 0,10	$ 0,30	$ 0,40

matriz de consumo da economia

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Continuando o Exemplo 1, vamos supor que o setor aberto necessita que a economia forneca bens manufaturados, produtos agrícolas e serviços com os valores em unidades monetárias seguintes.

d_1 unidades monetárias de bens manufaturados
d_2 unidades monetárias de produtos agrícolas
d_3 unidades monetárias de serviços

A matriz coluna **d** que tem esses números como elementos é chamada **vetor demanda externa**.

Como os setores produtivos consomem alguns de seus próprios produtos, o valor em unidades monetárias de seus produtos precisa cobrir suas próprias necessidades e a demanda externa. Suponhamos que os valores necessários para cobrir isso sejam

x_1 unidades monetárias de bens manufaturados
x_2 unidades monetárias de produtos agrícolas
x_3 unidades monetárias de serviços

A matriz coluna **x** que tem esses números como elementos é chamada **vetor de produção**.

Para a matriz consumo $C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}$, a porção do vetor de produção **x** que será consumido pelos três setores produtivos é

$$\underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}}_{\text{As frações consumidas pela manufatura}} + \underbrace{x_2 \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}}_{\text{As frações consumidas pela agricultura}} + \underbrace{x_3 \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}}_{\text{As frações consumidas pelos serviços}} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C\mathbf{x}$$

A matriz C**x** é denominada **vetor demanda intermediária** da economia.

Uma vez atendida a demanda intermediária, a porção da produção que resta para satisfazer as necessidades da demanda externa é $\mathbf{x} - C\mathbf{x}$. Assim, se o vetor demanda externa for **d**, então **x** deve satisfazer a equação:

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\boxed{\text{Quantidade produzida}}} - \underbrace{C\mathbf{x}}_{\boxed{\text{Demanda intermediária}}} = \underbrace{\mathbf{d}}_{\boxed{\text{Demanda externa}}}$$

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \qquad (1)$$

A matriz I – C é denominada **matriz de Leontief** e a equação em (1) é denominada **equação de Leontief**.

Exemplo 2. Considere a economia descrita na Tabela 1 do Exemplo 1. Suponhamos que o setor aberto tenha uma demanda externa no valor de \$7.900 de produtos manufaturados, \$3.950 de produtos agrícolas e \$1.975 de serviços.

(a) A economia conseguirá atender essa demanda?

(b) Se conseguir, encontre um vetor de produção **x** que atenda exatamente essa demanda.

Solução. A matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa são:

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix}$$

Para atender essa demanda, o vetor x deve satisfazer a equação de Leontief e, portanto, o problema se reduz em resolver o sistema linear (se for compatível):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}}_{I - C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

Verifique que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27.500 \\ 0 & 1 & 0 & 33.750 \\ 0 & 0 & 1 & 24.750 \end{array}\right]$$

Isso nos diz que o sistema $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ é compatível e determinado, e que a economia consegue atender exatamente a demanda do setor aberto, produzindo um valor total de \$27.500 de produtos manufaturados, \$33.750 de produtos agrícolas e \$24.750 de serviços.

2. MODELO ECONÔMICO DE LEONTIEF

Na discussão precedente, consideremos uma economia aberta com três setores produtivos; as mesmas ideias se aplicam a economias com n setores produtivos. Nesse caso, a matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa têm a forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

c_{ij} = valor monetário do produto do i-ésimo setor que é necessário para o j-ésimo setor produzir um produto no valor de uma unidade monetária

x_i = valor monetário do produto do i-ésimo setor

d_i = valor monetário do produto do i-ésimo setor que é necessário para atender a demanda do setor aberto

Conforme discutido no exemplo precedente, um vetor de produção **x** que atenda a demanda **d** do setor externo deve satisfazer a equação de Leontief

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Se a matriz (I – C) for inversível, então essa equação tem a solução única

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d}$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP