Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 6 - Resolução e Discussão Sistemas Lineares

Objetivos dessa aula:

- discutir sistemas lineares, usando o método do escalonamento;
- solucionar um sistema linear usando a inversa da matriz dos coeficientes;
- apresentar a Regra de Cramer.

1. DISCUSSÃO DE SISTEMAS LINEARES

Discutir um sistema é analisar sob quais condições ele admite soluções e, quando estas existem, quantas são. Ao final do processo de escalonamento da matriz associada a um sistema linear, excluindo as equações do tipo 0 = 0, chegamos a uma entre três situações possíveis:

1. Existe alguma equação do tipo $0 = a$, com $a \neq 0$. Isto é, uma equação impossível de ser satisfeita. Nesse caso: **sistema incompatível**, seu **conjunto-solução é vazio**.
2. Obtemos uma quantidade de equações menor do que o número de incógnitas. Nesse caso: **sistema compatível e indeterminado**, seu **conjunto-solução admite infinitas soluções**.
3. Obtemos uma quantidade de equações igual ao de incógnitas. Nesse caso: **sistema compatível e determinado**, seu **conjunto-solução é unitário**.

Exemplo 1. Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x+2y-z &= -4 \\ x+3z &= a \end{cases}$, segundo os valores do parâmetro a.

Escalonando sua matriz aumentada, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & a-6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & a-16 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ y-2z &= -10 \\ 0 &= a-16 \end{cases} \Rightarrow$$

- $a \neq 16 \Rightarrow$ sistema incompatível.
- $a = 16 \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado

Exemplo 2. Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x + ay &= 2 \\ ax + 2ay &= 4 \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ a & 2a & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 2a - a^2 & 4 - 2a \end{array}\right]$$

Vamos determinar os valores de a para os quais o primeiro lado da segunda equação se anula:

$$2a - a^2 = 0 \Rightarrow a(2-a) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 2$$

- $a = 0 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x &= 2 \\ 0 &= 4 \end{cases} \Rightarrow$ incompatível.

$$\begin{cases} x + ay &= 2 \\ ax + 2ay &= 4 \end{cases}$$

$$2a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 2$$

- $a = 0 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x &= 2 \\ 0 &= 4 \end{cases} \Rightarrow$ incompatível.
- $a = 2 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x + 2y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Rightarrow$ compatível e indeterminado.
- $a \neq 0$ e $a \neq 2 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x + ay &= 2 \\ by &= c \end{cases}$, com $b = 2a - a^2 \neq 0$ e $c = 4 - 2a \Rightarrow$ compatível e determinado.

Exemplo 3. Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+2y+kz = 2 \\ kx+2y+z = -2 \end{cases}$, segundo os valores do parâmetro k.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k & 2 \\ k & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 2 \\ 0 & 2-k & 1-k & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & (1-k)-(k-1)(2-k) & -2-2(2-k) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-3) & 2(k-3) \end{array}\right]$$

Daí, temos $(k-1)(k-3)=0 \Rightarrow k=1$ ou $k=3$.

- $k=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y = 2 \\ 0 = -4 \end{cases} \Rightarrow$ sistema incompatível.

- $k=3 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado.

- $k \neq 1$ e $k \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+az = 2 \\ bz = c \end{cases}$, com $a = k-1$, $b = (k-1)(k-3) \neq 0$ e $c = 2(k-3)$

$\Rightarrow$ sistema compatível e determinado.

2. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR USANDO A^{-1}

Proposição. Se A for uma matriz inversível n x 1, então para cada matriz B de ordem n x 1, o sistema de equações $A \cdot X = B$ tem exatamente uma solução, a saber, $X = A^{-1} \cdot B$.

De fato,

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Exemplo 4. Vamos resolver, pelo cálculo da matriz inversa, o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$$

Não esqueça! Esse método só pode ser aplicado quando o sistema tiver o mesmo número de equações e incógnitas, e a matriz dos coeficientes for inversível.

3. REGRA DE CRAMER

Proposição. Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas. Se D ≠ 0, então o sistema é compatível e determinado e sua única solução $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dada por

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde D_i é o determinante da matriz que se obtém, a partir de A, substituindo-se a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes do sistema.

Exemplo 5. Vamos resolver, pela Regra de Cramer, o sistema $\begin{cases} x+2y-3z = -15 \\ 2x-y+z = 10 \\ 3x-z = 1 \end{cases}$

Temos $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$ Logo, o sistema tem solução única.

Vamos determinar essa solução.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -15 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -15 & -3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -15 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Logo, $x = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{2} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{2} = -1, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{10}{2} = 5$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP