Fundo Patrimonial FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 5 - Sistemas Lineares

Objetivos dessa aula:

- resolver e classificar sistemas lineares;

1. EQUAÇÕES LINEARES

Uma equação é uma sentença matemática aberta, isto é, com variáveis, onde duas expressões são ligadas pelo sinal "=".
Ex: $2x - 1 = 0$; $x^2 - 2x = 6$; etc.

Definição. Chamamos de **equação linear** uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b\,,$$

onde:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **variáveis** (ou **incógnitas**);
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais e chamados de **coeficientes**; e
- b é o **termo independente** da equação.

Exemplo 1. São equações lineares:

$$3x_1 - 2x_2 + 17 = 0$$

$$2x - 3y + 4z = 1$$

$$4a - 5b + 4c - d = 10$$

$$x = 2$$

Exemplo 2. São equações não-lineares:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$3xy - x + 4 = 0$$

$$2\sqrt{x} - 3y = 1$$

1. EQUAÇÕES LINEARES

Definição. Uma **solução** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números reais (não necessariamente distintos entre si) indicada por $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$ é uma sentença verdadeira.

Exemplo 3. Dada a equação $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, a terna ordenada $(1,1,0)$ é uma solução dessa equação, pois:

$$2.1 - 1 + 0 = 2 - 1 + 0 = 1$$

Exemplo 4. Seja a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$, verifique se as sequências $(1,2,3,-2)$ e $(1,1,2,1)$ são soluções dessa equação.

Solução: $(1,2,3,-2) \Rightarrow 2.1 + 3.2 - 3 + (-2) = 2 + 6 - 3 - 2 = 3, \therefore$ **é solução.**

$(1,1,2,1) \Rightarrow 2.1 + 3.1 - 2 + 1 = 2 + 3 - 2 + 1 = 4 \neq 3, \therefore$ **não é solução.**

Exemplo 5. Seja a equação linear $0x + 0y + 0z = 0$. É fácil notar que qualquer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução da equação. (possui infinitas soluções)

Exemplo 6. Seja a equação linear $0x + 0y + 0z + 0t = 2$. É fácil observar que qualquer quádrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ não satisfaz a equação, pois $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$ é sentença falsa $\forall \alpha_1, \forall \alpha_2, \forall \alpha_3, \forall \alpha_4$. (não tem solução)

2. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Definição. Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos).

Uma **solução do sistema S** é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Exemplo 7. Sem ter que aplicar regras de resolução, podemos ver que:

1. O sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ possui **uma única solução**: o par (2,1).

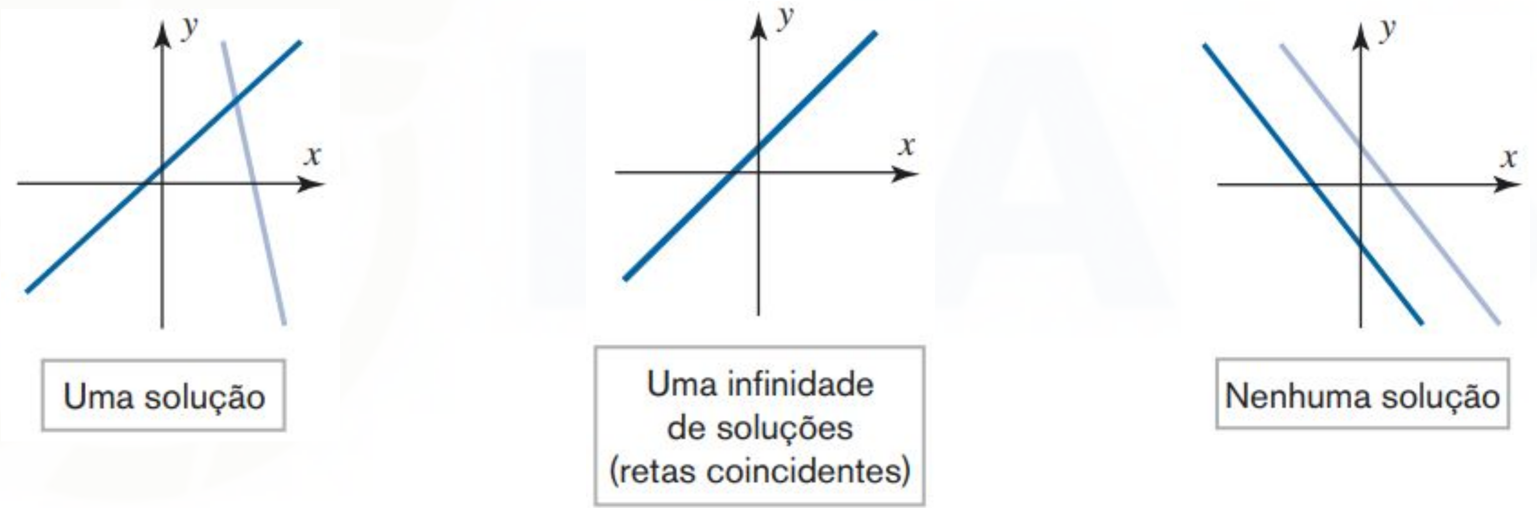
2. O sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ possui **mais de uma única solução**:

os pares (1,2), (0,3), (3,0), (2,1), (3/2, 3/2).

3. O sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$ **não possui solução**:

(A soma de dois números reais é única!)

Sistemas lineares em duas incógnitas.



Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções. Não existem outras possibilidades.

DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

- **Compatível (ou possível) e determinado:** quando possui <u>uma única solução</u>.
- **Compatível e indeterminado:** quando possui <u>mais de uma solução</u>.
- **Incompatível (ou impossível):** quando <u>não possui solução</u>.

Definição. **Discutir** um sistema linear significa efetuar um estudo deste visando classificá-lo segundo a definição anterior. **Resolver** um sistema linear significa determinar todas as suas soluções. O conjunto dessas soluções recebe o nome de **conjunto solução do sistema**.

Exemplo 8. Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

3. SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Definição. Dizemos que um sistema linear é **homogêneo** quando os termos independentes de todas as equações que o compõem são iguais a zero.

Exemplo 9. São sistemas lineares homogêneos:

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1-x_2+7x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5y=0 \\ x+5y=0 \\ -x+4y=0 \end{cases}$$

Observe que um sistema linear homogêneo em n incógnitas sempre admite a solução (0,0,...,0), chamada **solução trivial**.

4. MATRIZES ASSOCIADAS A UM SISTEMA LINEAR

Podemos reescrever o sistema S numa forma matricial:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}^{B}$$

- A é a matriz dos coeficientes;
- X é a matriz das incógnitas;
- B é a matriz dos termos independentes.

Outra matriz que podemos associar ao sistema é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matriz ampliada (ou aumentada) do sistema

Exemplo 9. Escreva na forma matricial os seguintes sistemas lineares.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

5. SISTEMAS ESCALONADOS

Observe o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 2x & +y & -z & = & 3 \\ & +3y & +z & = & -1 \\ & & 2z & = & 4 \end{cases}$$

Note que, para resolvê-lo, basta:

- determinar o valor de z na terceira equação;
- substituir o valor de z na segunda equação e obter y;
- substituir y e z na primeira equação e obter x.

A resolução do sistema ficou bastante facilitada. Vejamos a matriz aumentada desse sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{matriz escalonada}}$$

5. SISTEMAS ESCALONADOS

Dada um sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

diremos que S está na forma escalonada, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação, isto é, tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3n}x_n = & b_3 \\ & & & & \vdots \quad = & \vdots \\ & & & & a_{mn}x_n \quad = & b_m \end{cases}$$

Exemplo 10. Temos os seguintes exemplos de sistemas escalonados:

$$S_1 \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ \quad\;\; y - z = 4 \\ \qquad\;\; 2z = 5 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 4x - y + z + t + w = 1 \\ \qquad\qquad z - t + w = 0 \\ \qquad\qquad\quad 2t + w = 1 \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ \quad\;\; 2y - z = 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ESCALONAMENTO

Definição. Dois sistemas de equações lineares são **equivalentes** se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Proposição. Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado S'.

$$\begin{tikzcd}
\text{Sistema linear } S \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{equivalentes}"] \arrow[d] & & \text{Sistema linear } S' \\
\text{matriz } A \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{operações elementares}"] & & \text{matriz escalonada } A' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Exemplo 11. Vamos resolver, por escalonamento, o sistema linear $S:\begin{cases} x + 2y + 5z = 28 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 4y + z = 13 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 0 & -43 & -215 \end{bmatrix}$$

$$S':\begin{cases} x + 2y + 5z = 28 \\ -y - 11z = -57 \\ -43z = -215 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = (-215)/(-43) = 5 \\ y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Como S e S’ são sistemas lineares equivalentes, essa também é a solução do sistema S dado. Logo, o conjunto-solução procurado é {(−1,2,5)}. Além disso, podemos classificar o sistema S: ele é compatível e determinado.

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP