Lista 5: Integrais Múltiplas

Conjuntos de Conteúdo Nulo

1) Em ao menos três itens, decida (e prove) se os seguintes conjuntos têm ou não conteúdo nulo no $\mathbb{R}^n$:

(a) Um conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;

(b) Um intervalo n-dimensional não-vazio I (fechado, aberto, semiaberto, etc.);

(c) Um conjunto aberto não-vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;

(d) O conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \cup \{0\}$, $n = 1$;

(e) O gráfico *gráf* $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \mid x \in K, y = f(x)\}$ de uma função contínua $f\colon K \to \mathbb{R}^p$ definida num subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^m$, $n = m + p$ (estude a demonstração dada na monitoria de 15/06);

(f) A diagonal de um hipercubo C, $\Delta C = \{x \in C \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;

(g) As faces de um intervalo n-dimensional I, isto é, conjuntos A tais que existem $0 \leq k \leq n$ (chamado de *codimensão* da face), índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ e constantes $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tais que $A = \left\{x \in \overline{I} \mid x_{i_j} = c_j \ \forall\, j = 1, \dots, k\right\}$.

2) Decida (e prove) se o seguinte conjunto tem ou não conteúdo nulo no $\mathbb{R}^2$: $X = S \cup C$,

$$S = \left\{\left(1 - \frac{1}{t}\right)\left(\cos\frac{1}{t}, \sin\frac{1}{t}\right) \ \middle|\ t \in (0, 1]\right\}$$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3) Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitz-contínua. Mostre que, se $A \subset X$ é limitado e tem contéudo nulo, então $f(A)$ tem também conteúdo nulo. Conclua em particular que a propriedade de ter ou não conteúdo nulo é invariante por *difeomorfismos de classe* C^1 (isto é, bijeções de classe C^1 com inversa também de classe C^1).

4) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma m-superfície compacta, $m < n$. Usando o Teorema da Função Implícita e a compacidade de M, mostre que existem pontos $x_1, x_2, \ldots, x_N \in M$ e vizinhanças U_i de x_i em $\mathbb{R}^n$ tais que:

(i) $U_i \cap M$ é o gráfico de uma função $\zeta_i \colon V_i \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$

(ii) existem compactos $K_i \subset V_i \subset \mathbb{R}^m$ tais que

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \textit{gráf}\, \zeta_i\big|_{K_i}$$

.

Conclua que M tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^n$.

5) **(Conjuntos de Cantor)**

(a) Seja C o conjunto triádico de Cantor, construído da seguinte forma: $C_0 = [0,1]$; $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ é obtido de C_0 removendo-se seu terço médio; $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ é obtido de C_1 removendo-se os terços médios de seus dois intervalos componentes; e, indutivamente, C_{n+1} é obtido de C_n removendo-se os terços médios de cada um de seus 2^n intervalos componentes. Definimos então $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

Encontre uma expressão para C_n como reunião disjunta de 2^n intervalos. Mostre que C é compacto e tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}$.

(b) Considere o conjunto $\tilde{C}$, de construção similar ao conjunto triádico de Cantor: $C_0 = [0,1]$ e C_{n+1} é obtido de C_n removendo-se a 3^n-ésima parte média de cada um de seus intervalos componentes. Mostre que $\tilde{C}$ não tem conteúdo nulo (é um exemplo do que chamamos de *conjunto de Cantor gordo*).

Integrais Múltiplas e Volume de Jordan

6) Sejam $Q \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo fechado n-dimensional e $f\colon Q \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que:

(a) f é integrável se, e somente se, $|f|$ (definida por $|f|(x) = |f(x)|$) é integrável;

(b) $\left|\int_Q f(x)\, dx\right| \leq \int_Q |f|(x)\, dx$.

7) Seja $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \notin \mathbb{Q}, \frac{1}{2} < y \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{2} < y \leq 1 \text{ ou } x \notin \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mostre que

$$\exists \int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{1}{2} \ \forall\, x \in [0,1]$$

(e que portanto, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = \frac{1}{2}$), mas

$$\nexists \int_0^1 f(x,y)\, dx \ \forall\, y \in [0,1]$$

A função f é integrável?

8) Usando a igualdade da integral múltipla e das integrais iteradas sob as condições vistas em aula, em cada item abaixo, calcule a integral da função f no quadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$, no cubo $C = [0,1]^3$ ou no hipercubo $\mathbf{C} = [0,1]^n$, dependendo do que for pedido.

(a) $f(x,y) = x^2 y + y e^{xy}$ em Q

(b) $f(x,y,z) = x \sin z - 3yz \tan \frac{\pi}{4} x$ em C

(c) $f(x,y) = \sin^2(x-y) + \cos^3(xy)$ em Q

(d) $f(x) = ||x||^2$ em $\mathbf{C}$

(e)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{se } x > y \end{cases} \quad \text{em } Q$$

9) Sejam Q um intervalo n-dimensional fechado e $f, g\colon Q \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Suponha que o conjunto $E = \{x \in Q \ | \ f(x) \neq g(x)\}$ tenha conteúdo nulo. Mostre que

$$\int_Q |f(x) - g(x)| \ dx = 0$$

e conclua que $\int f = \int g$.

Definição 1: **(Mensurabilidade e volume segundo Jordan)** Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Dizemos que A é *mensurável segundo Jordan* (ou J-mensurável) se a fronteira de A, ∂A, tem conteúdo nulo. Observe que, como consequência, se $f\colon A \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável.

Em particular, a função característica

$$\begin{aligned} 1_A \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

é integrável em A; definimos o *volume de Jordan* de A por vol $A = \int_A 1_A(x)\ dx$.

10) Mostre ao menos três das seguintes propriedades da J-mensurabilidade e do volume de Jordan:

(a) Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são J-mensuráveis, então $A \cup B$, $A \cap B$ também o são e

$$\text{vol}\,(A \cup B) = \text{vol}\,A + \text{vol}\,B - \text{vol}\,(A \cap B)$$

Em particular, se $A \cap B = \varnothing$ então $\text{vol}\,(A \cup B) = \text{vol}\,A + \text{vol}\,B$;

(b) Se $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ são J-mensuráveis, então $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ também o é e

$$\text{vol}\,(A \times B) = \text{vol}\,A \cdot \text{vol}\,B$$

(c) Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são J-mensuráveis e $A \subset B$, então $\text{vol}\,A \leq \text{vol}\,B$;

(d) Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são J-mensuráveis e $A \subset B$, então $B \setminus A$ é J-mensurável e $\text{vol}\,(B \setminus A) = \text{vol}\,A - \text{vol}\,B$;

(e) Se A é J-mensurável, então $\mathring{A}$ e $\overline{A}$ também o são e $\text{vol}\,A = \text{vol}\,\mathring{A} = \text{vol}\,\overline{A}$;

(f) Se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos, $\varphi\colon U \to V$ é um difeomorfismo de classe C^1 (vide ex. 3) e $\Omega \subset U$ é um aberto de fronteira regular (vide lista 4, ex. 11) tal que $\overline{\Omega} \subset U$, então todo A tal que $\Omega \subset A \subset \overline{\Omega}$ é J-mensurável, assim como $\varphi(A)$;

(g) Seja $\tilde{C}$ o conjunto do ex. 5(b). Então $\tilde{C}$ é compacto e $\partial\tilde{C} = \tilde{C}$, logo $\tilde{C}$ **não** é J-mensurável. Conclua que nem todo compacto nem todo aberto limitado é J-mensurável.

11) Mostre que:

(a) Se A é um conjunto limitado tal que 1_A é integrável, então ∂A tem conteúdo nulo e A é J-mensurável. *Dica*: use o Teorema de Integrabilidade de Lebesgue (discutido na monitoria de 24/06) para concluir que ∂A tem medida nula, e use o fato de ∂A ser compacto para concluir que ∂A tem contéudo nulo (vide monitoria de 24/06);

(b) Mostre que A tem conteúdo nulo se, e somente se, $A \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável e $\text{vol}\,A = 0$.

Mudança de Variáveis

Nos exercícios 12- 14 abaixo, usaremos o Teorema de Mudança de Variáveis (teorema 1 abaixo), cuja demonstração não foi dada em aula. No entanto, sendo uma ferramenta valiosíssima no cálculo de integrais, decidi incluí-lo na lista e treiná-los no seu uso. Caso tenham interesse em ver a demonstração do teorema, entrem em contato comigo que fornecerei uma referência adequada.

Teorema 1. **(Mudança de Variáveis)** Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $\varphi\colon U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 e $A \subset U$ J-mensurável. Então:

(i) $B = \varphi(A)$ é J-mensurável;

(ii) Se $f\colon B \to \mathbb{R}$ é integrável, então a função

$$\begin{aligned} \varphi^* f\colon A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \circ \varphi)(x)\ |D\varphi(x)| = f(\varphi(x))\ |\det J\varphi(x)| \end{aligned}$$

é integrável (onde $J\varphi(x)$ é a jacobiana de φ em x); e

(iii)

$$\int_B f(y)\ dy = \int_A (\varphi^* f)(x)\ dx$$

O Teorema 1 acima já é, em dimensão 1, a principal ferramenta para calcular integrais. Em dimensões maiores, pouquíssimas integrais são calculáveis (sem recorrer à definição e manipulações analíticas «infernais») sem uma mudança de coordenadas apropriada, que reflita as simetrias do domínio de integração. Nos exercícios 12-14, exploraremos um pouco sua força.

12) Sejam $a < b, c < d \in \mathbb{R}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma *reparametrização* do intervalo $[a, b]$: isto é, $u'(t) \neq 0\ \forall\ t \in [a, b]$. Use o Teorema 1 para mostrar o Método de Substituição (querido conhecido de vocês do Cálculo 1):

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} (f \circ u^{-1})(s)\,\frac{ds}{u'(u^{-1}(s))}$$

sendo essa última tipicamente denotada por $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\frac{dx}{du}\,du$.

Note a ausência do módulo: qual a explicação disso?

13) (Integração em Coordenadas Polares)

Sejam $P^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\mathbb{H} = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ (chamados de *plano perfurado* e *semiplano direito*).

Para $0 < r < R \leq \infty \in \mathbb{R}$, definimos o *ânulo aberto*

$$A(r, R) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; r^2 < x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

Analogamente, definimos o ânulo fechado $\overline{A}(r, R)$.

Considere a função $\varphi\colon \mathbb{H} \to P^*$ dada por $\varphi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Chamamos φ de *aplicação mudança de coordenadas polares a cartesianas*.

Dados $0 < r < R \leq \infty, \theta_0 < \theta_1 \in \mathbb{R}$, definimos o *setor anular aberto* $SA(r, R, \theta_0, \theta_1)$ por

$$SA(r, R, \theta_0, \theta_1) = \varphi\left((r, R) \times (\theta_0, \theta_1)\right)$$

Dizemos que o setor anular $SA(r, R, \theta_0, \theta_1)$ é *próprio* se $\theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$, isto é, se $SA(r, R, \theta_0, \theta_1)$ está estritamente contido em $A(r, R)$.

(a) Calcule $D\varphi(\rho, \theta)$ e $\det J\varphi(\rho, \theta)$. Mostre que a diferencial de φ é inversível em todo ponto. Conclua que φ é um difeomorfismo local: cada $(\rho, \theta) \in \mathbb{H}$ possui uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{H}$ tal que φ se restringe a um difeomorfismo entre U e $\varphi(U)$.

Mais especificamente, mostre que se $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$, então φ aplica a semi-faixa $(0, \infty) \times (\theta_0, \theta_1)$ difeomorficamente sobre o setor anular próprio $SA(0, \infty, \theta_0, \theta_1)$, que é aberto em P^*.

(b) Usando o Teorema 1, deduza que o *elemento de área* em coordenadas polares é dado por $\rho\, d\rho\, d\theta$, isto é: se $X = SA(r, R, \theta_0, \theta_1)$ é um setor anular próprio, $R < \infty$, então para toda $f\colon X \to \mathbb{R}$ integrável vale

$$\int_X f(x,y)\; dx\, dy = \int_r^R \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\; \rho\, d\rho\, d\theta$$

(c) Sejam $A = \overline{A}(r, R)$ um ânulo fechado, $R < \infty$, $B = SA(r, R, 0, 2\pi)$, e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que $A \setminus B = A \cap (S_r \cup S_R \cup X^+)$ tem conteúdo nulo, onde

$$S_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

é o círculo centrado na origem de raio r, S_R é o círculo centrado na origem de raio R e $X^+ = \{(x,0) \;\mid\; x \geq 0\}$ é o eixo x não-negativo.

Defina $g\colon A \to \mathbb{R}$ por $g(x,y) = f(x,y)1_B(x,y)$, i.e., $g = f$ dentro de $SA(r, R, 0, 2\pi)$ e $g = 0$ fora. Mostre que

$$E = \{(x,y) \in A \;\mid\; f(x,y) \neq g(x,y)\} = A \cap (S_r \cup S_R \cup X^+)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\; dx\, dy &= \int_A g(x,y)\; dx\, dy = \int_B g(x,y)\; dx\, dy \\ &= \int_r^R \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\; \rho\, d\rho\, d\theta\end{aligned}$$

Assim, podemos integrar em coordenadas polares mesmo quando nosso domínio de integração não cabe em nenhum setor anular próprio (onde vale o Teorema de Mudança de Variáveis).

(d) Use os itens (a), (b) e (c) para calcular as integrais

$$\int_D (x - 3y + xy^2)\, dx\, dy \qquad \text{vol}\, E = \int_E dx\, dy$$

onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 < 5^2\right\}$.

(e) Use integração em coordenadas polares para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

14) Considere o elipsóide fechado

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 \leq 5^2\right\}$$

Partindo do sistema de coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \varphi\colon (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \ | \ x, z \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \\ (\rho, \theta, \phi) &\mapsto (\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho\cos\theta) \end{aligned}$$

encontre um difeomorfismo

$$\psi\colon (0, 5) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to U \subset E$$

tal que $E \setminus U$ tem conteúdo nulo. Use o Teorema 1 para calcular vol E.