7. PROJETO VIA H_∞

- H_∞ é um nome que assusta!

- Ideia central: baixar o valor do pico da resposta em frequência

- Restrições de projeto:

  $S(s)$

  $T(s)$

  $K(s)\,S(s)$

- Primeiro passo neste capítulo:

  Restrições de projeto reescritas como desigualdades envolvendo a norma H_∞ (incertezas $\rightarrow \ell_m$!)

- Segundo passo neste capítulo:

  Estabelecer um novo paradigma de controle
  - planta aumentada
  - modelo de estados

- Cálculo do compensador via software

  "Automático"

  Em geral $\rightarrow$ ordem alta

7.1 - PRELIMINARES

- $F(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

  - Real
  - Racional
  - Estável
  - Própria

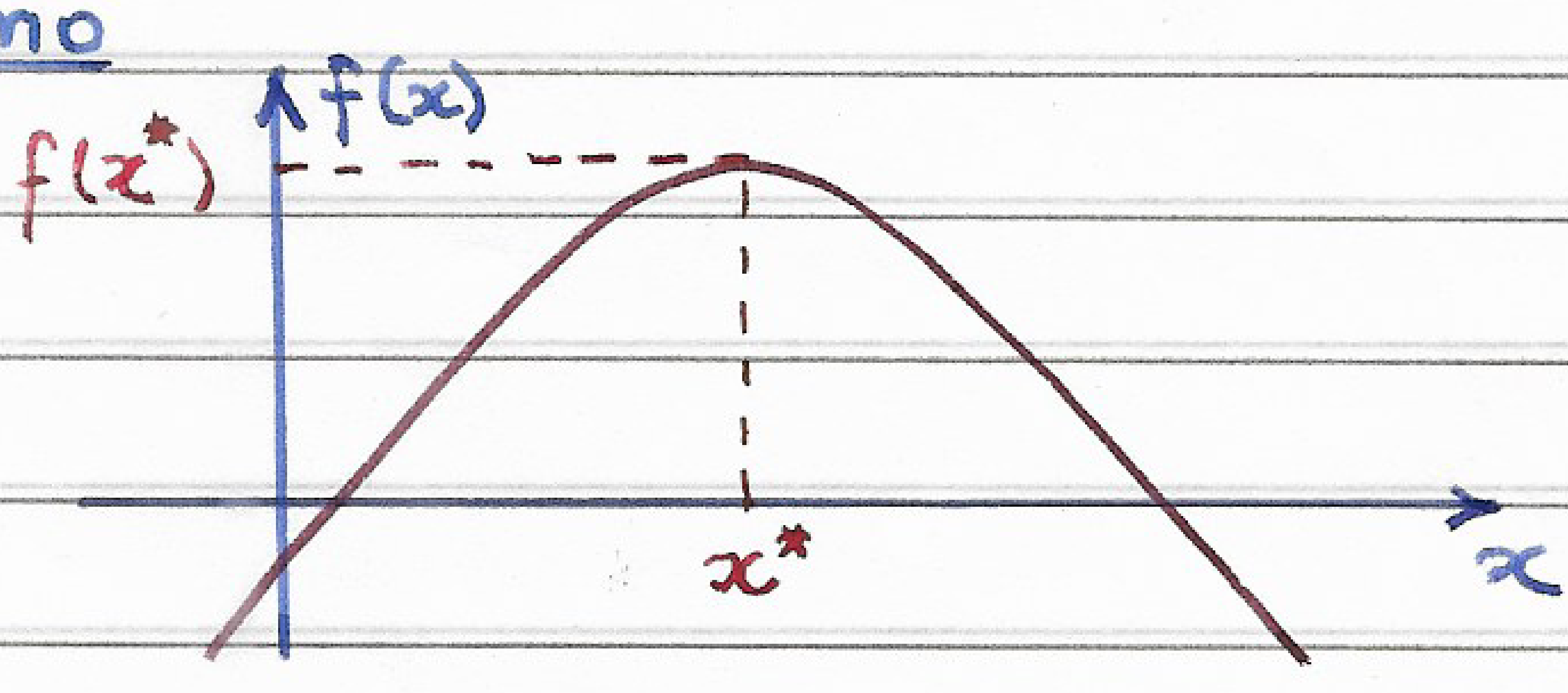
Racional → quociente entre dois polinômios
Real → coeficientes reais
Estável → polos no semi-plano esquerdo aberto ⇒ $F(j\omega)$ definida p/ $\forall \omega \in \mathbb{R}$
Própria → grau do numerador ≤ grau do denominador

DEFINIÇÃO 7.1 - NORMA H_∞

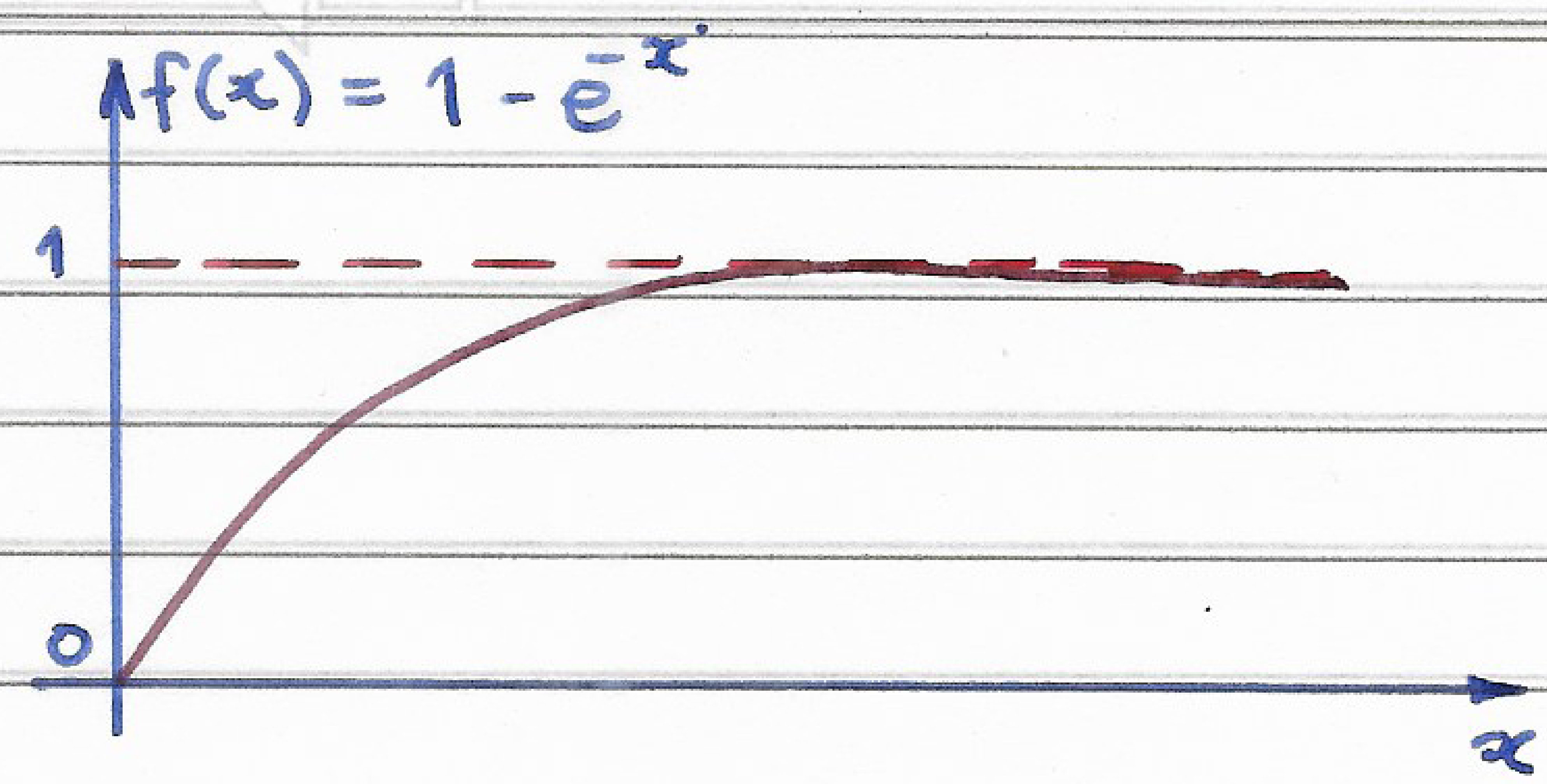
$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |F(j\omega)|$$

Nota: Supremo x Máximo

- Máximo

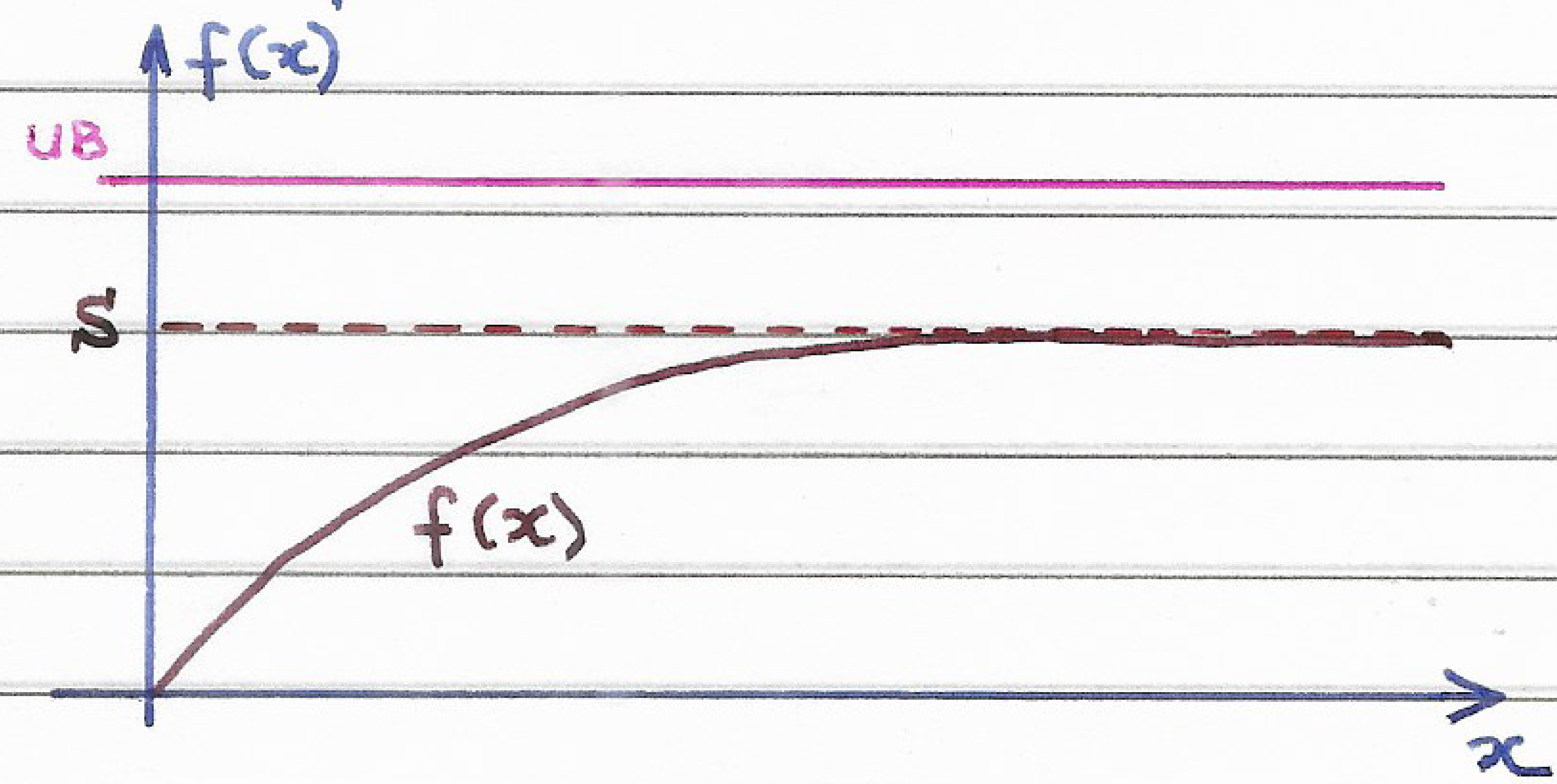


- Pergunta: $f(x) = 1 - e^{-x}$ tem máximo? $(x \geq 0)$



$f(x)$ não tem máximo !

- Supremo



UB = "upper bound" (limitante superior)

$UB \geq f(x) \quad (\forall x)$

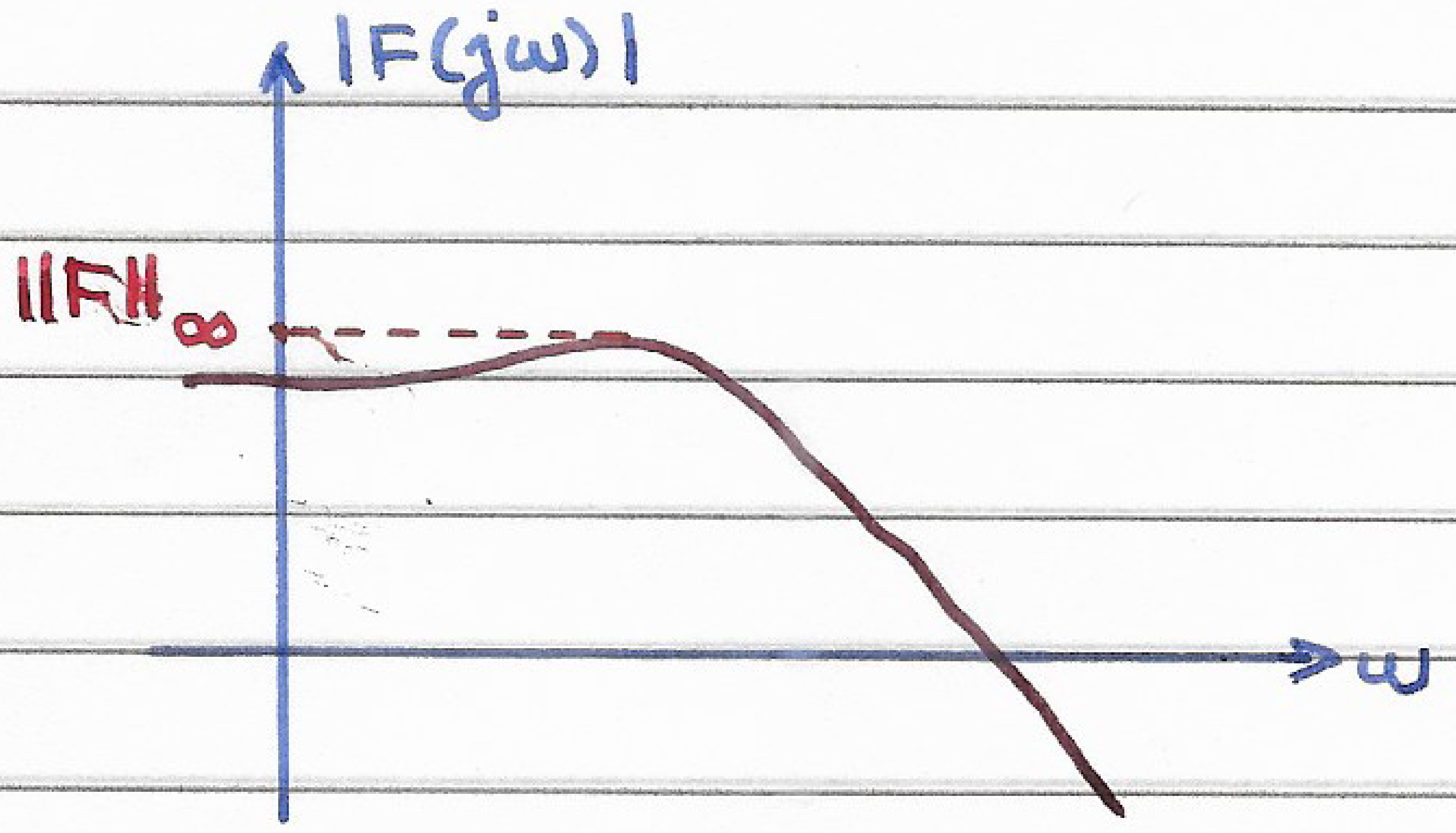
$\boxed{\min_{UB \geq f(x)} UB \triangleq S}$ (supremo de f)

No caso em que $f(x) = 1 - e^{-x}$ $(x \geq 0)$,

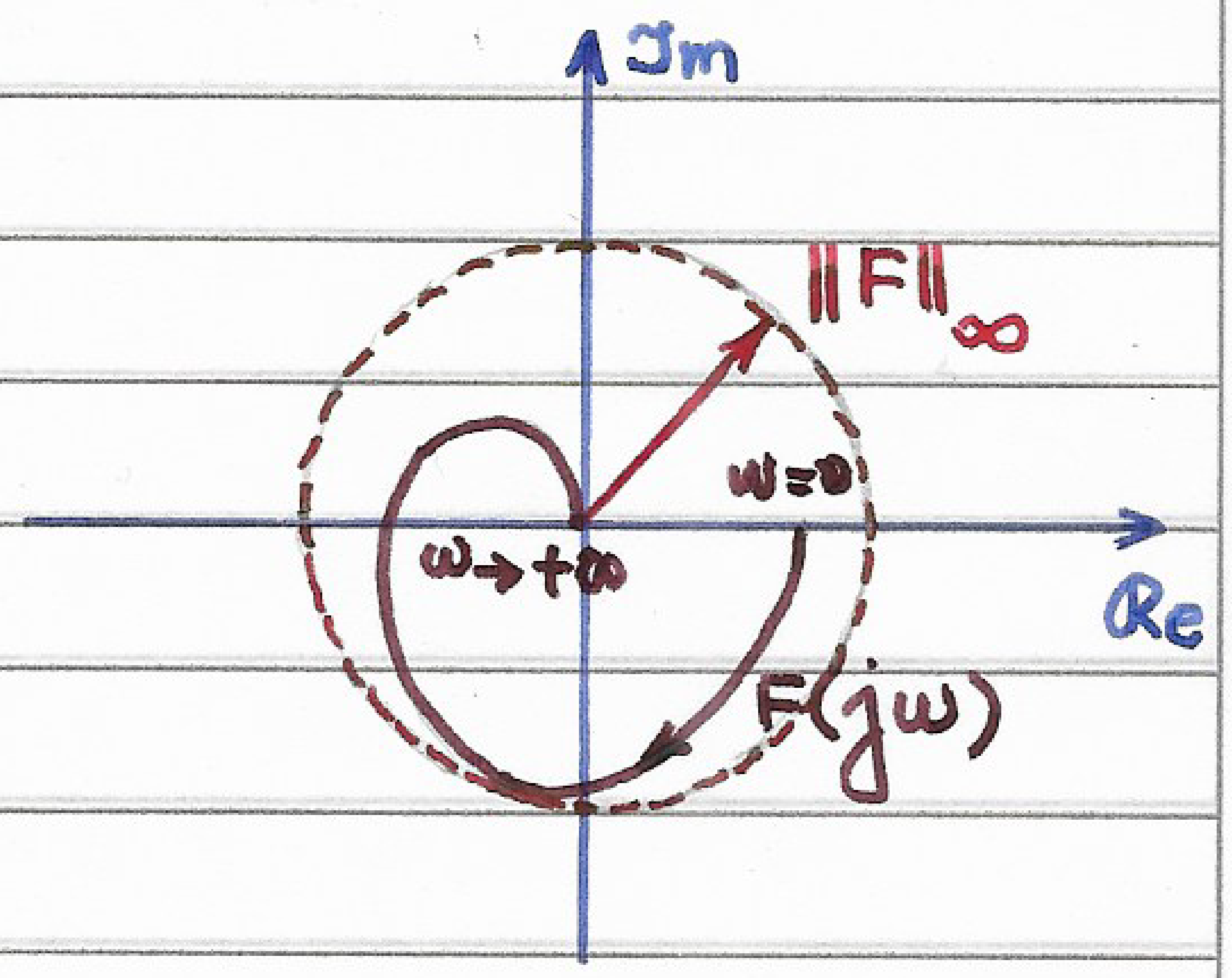
$S = 1.$

$F(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ real, racional, estável, própria

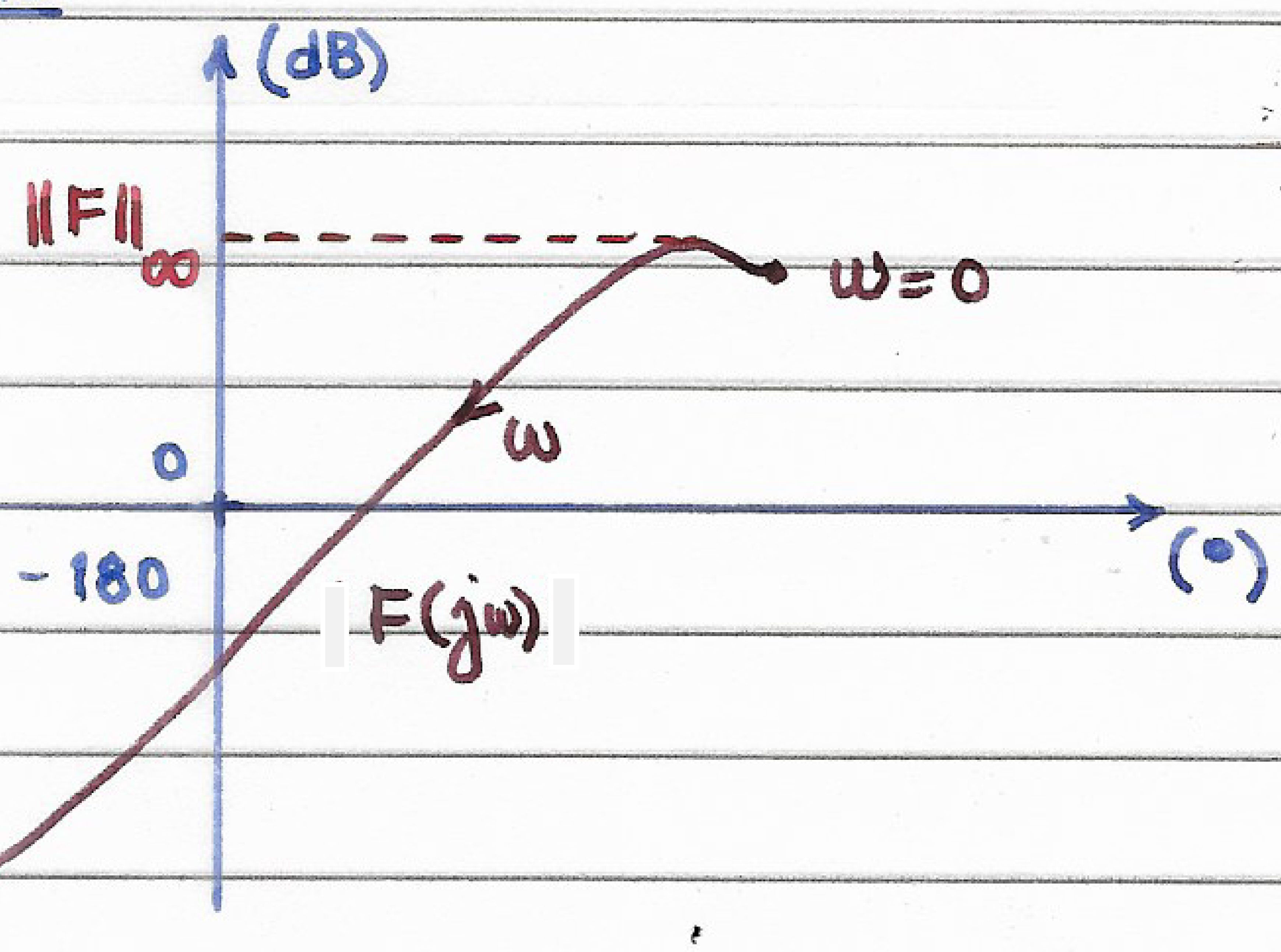
Bode



Nyquist



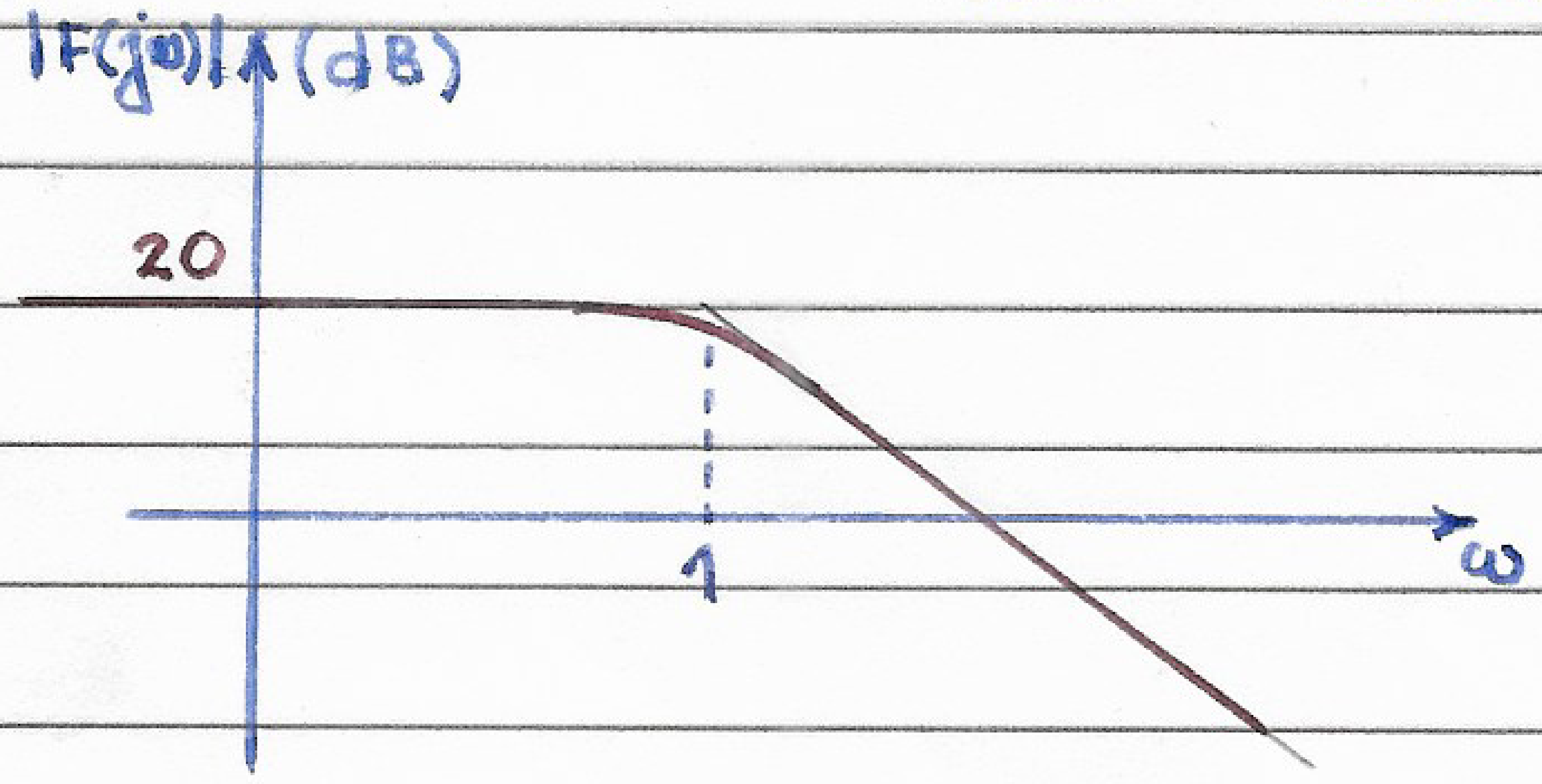
Nichols



EXEMPLO

$$F(s) = \frac{10}{s+1}$$

Real ✓ Racional ✓ Estável ✓ Própria ✓



$\|F\|_\infty = 20 \text{ dB} = 10$

Note que $|F(j\omega)| \leq 10$. $(\forall \omega \geq 0)$

NOTA

- $\|F\|_\infty < b \Rightarrow |F(j\omega)| < b \quad (\forall\omega)$
- $|F(j\omega)| < b \ (\forall\omega) \Rightarrow \|F\|_\infty \leq b$

PROPRIEDADE 7.1 - Desigualdade Triangular

$$\|F+G\|_\infty \leq \|F\|_\infty + \|G\|_\infty$$

PROPRIEDADE 7.2 - Desigualdade de Schwarz

$$\|FG\|_\infty \leq \|F\|_\infty \cdot \|G\|_\infty$$

NORMA DE VETORES

$$F(s) = \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO 7.2 - Norma H_∞ de um vetor de funções

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(j\omega)|^2}}_{\text{Norma Euclideana}} = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|F(j\omega)\|_2$$

7.2 - ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE

- Condição de Robustez da Estabilidade

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{\ell_m(\omega)} \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

- Questão: Como reescrever esta condição com base na norma H_∞?

- Primeira ideia:

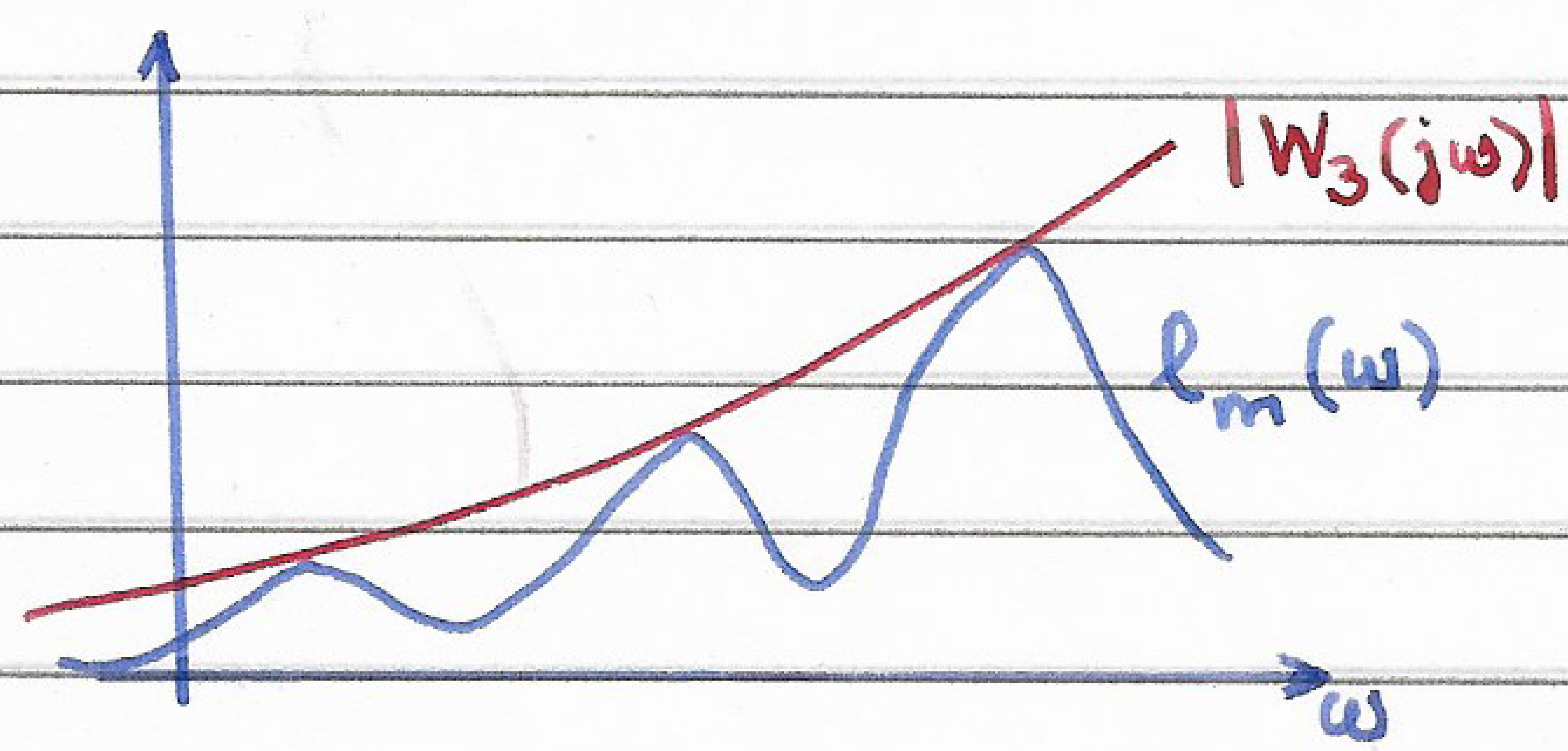
$$|\ell_m(\omega)\, T(j\omega)| < 1 \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

$$\|\ell_m T\|_\infty \leq 1 \quad ?$$

- Segunda ideia:

$W_3(s)$ real, racional, estável, de fase mínima !
tal que:

$$\ell_m(\omega) \leq |W_3(j\omega)| \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$



$$\ell_m(\omega) \leq |W_3(j\omega)| \implies |\ell_m(\omega) T(j\omega)| \leq |W_3(j\omega) T(j\omega)| \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

- Condição suficiente:

$$\boxed{\|W_3 T\|_\infty < 1}$$

W_3 é chamada de função de ponderação.

7.3 - ROBUSTEZ DO DESEMPENHO EM BAIXAS FREQUÊNCIAS

- Acompanhamento de referência:

$$|S(j\omega)| \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Rejeição de perturbações:

$$|S(j\omega)| \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

- Compatibilidade entre o pré-filtro e a malha fechada:

$$|S(j\omega)| \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\frac{\delta_F(\omega)}{|F(j\omega)|} \qquad (\omega \leq \omega_b)$$

- Escolher $W_1(s)$ real, racional, estável, de fase mínima tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{|W_1(j\omega)|} \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega_r \\[2ex] \dfrac{1}{|W_1(j\omega)|} \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\delta_d(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega_d \\[2ex] \dfrac{1}{|W_1(j\omega)|} \leq [1-\ell_m(\omega)]\,\dfrac{\delta_F(\omega)}{|F(j\omega)|} \text{ para } \omega \leq \omega_b \\[2ex] \dfrac{1}{|W_1(j\omega)|} \text{ suficientemente grande para as demais frequências} \end{cases}$$

- Com isso, é suficiente que:

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

Ou seja:

$$|W_1(j\omega)\,S(j\omega)| \leq 1 \qquad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

Portanto:

$$\boxed{\|W_1 S\|_\infty \leq 1}$$

NOTA

$$\begin{cases} |W_1(j\omega)| \geq \dfrac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)} & (\omega \in \Omega_r) \\[2ex] |W_1(j\omega)| \geq \dfrac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_d(\omega)} & (\omega \in \Omega_d) \\[2ex] |W_1(j\omega)| \geq \dfrac{|F(j\omega)|}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_F(\omega)} & (\omega \leq \omega_b) \\[2ex] |W_1(j\omega)| \text{ suficientemente pequeno}^{(*)} \text{ para as demais frequências} \end{cases}$$

Ver figura 7.6 das Notas de Aula (pg. 99)

(*) Ver Seção 7.10.