• Segunda quantização – conceitos & exemplos

1º Quantização: partículas clássicas → ondas (Eq. Schroedinger)

$m_\circ \xrightarrow{\vec{p}} \Rightarrow \rightsquigarrow \vec{k}$

$(a + a^\dagger)(\sigma + \sigma^\dagger)$
$(a^\dagger\sigma^\dagger + a^\dagger\sigma^- + a\sigma^+ + a\sigma^-)$

• 2º quantização: ondas → partículas

ondas clássicas → partículas
campos

Ondas / Campos		estado clássico	estado Quântico	Partícula
• eletromag.	⇝	$\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}$	$\lvert n \rangle$ estado Fock	• fóton
• Som	⇝	$\vec{u}(x,y)$, $n(\vec{r})$, Pressão, densidade	⇝ Fock $\lvert n \rangle$	• fônon
• Spin waves		$\vec{S}$	. . .	• Mágnon
• Surface (electron/plasma) waves		. . . .	. —	• plasmon
• Campo gravitacional		$\vec{g}$ ..	. . .	• "gráviton" (ñ detectado diretamente)

⇒ Ideia geral: Na maioria dos problemas de interesse o comportamento do sistema depende das seguintes situações

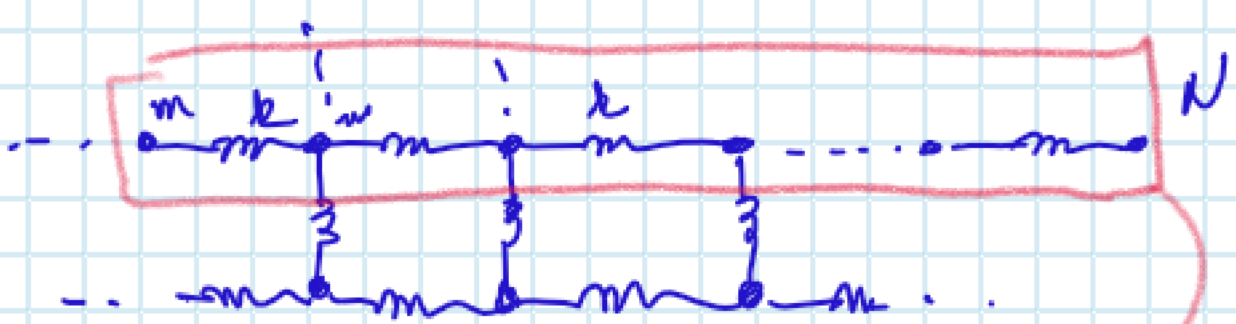
⇒ 1) Quais os estados permitidos do sistema

⇝ 2) Como as "partículas" do sistema se distribuem entre os estados permitidos ⇝ Quantum statistics

⇒ 3) Como as "partículas" respondem a estímulos externos (perturbações ou não) e interações externas

Exemplo:
fônons: oscilações mecânicas (elástico) em sólidos
(ex.: Vibrações em cordas, ondas sonoras, etc...)

• Vibrações de redes cristalinas

⇒ 

osc. com massa m
e cons. k

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Múltiplos osciladores Desacoplados

$$\boxed{\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\mathcal{H} = \sum_n^{N} \left[\frac{p_n^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \right]$$

Acoplamento

$$\rightarrow \begin{cases} [a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn} \\ [a_m, a_n] = [a_m^\dagger, a_n^\dagger] = 0 \end{cases}$$

$a|0\rangle$

$$\hat{x}_n = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_k}} \left(\hat{a}_k e^{ik_n x} + \hat{a}_k^* e^{-ik_n x} \right)$$

$\{\ \}_{\text{Poisson}}$

Parênteses de Poisson ⇒ Comutadores

2º quantização – diagrama geral

$\boxed{\text{Eq. do Campo (wave eq.)}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$ $\Rightarrow$ $\left(\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \right)$ $\leftarrow$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Expressão p/ Lagrangeana/Hamiltoniana p/ campos clássicos}}$

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d^3r$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2\right) d^3r$$

$\downarrow$

coordenadas Normais (canônicas)

$\mathcal{H}(q,p) \rightsquigarrow \hat{H}$: Hamilt. quântico

$\{\ \}_{\text{Poisson}} \rightarrow$ Comutadores/Anti-comutadores

clássico — quantização

$\hookrightarrow$ osc harmônico (bósons)

$$\hat{H}_q = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^{\dagger} a_k + 1/2\right)$$

osciladores quânticos desacoplados

bósons: $[A,B] = AB - BA$

férmions: $\{A,B\} = AB + BA$

$\boxed{a_k^{*},\ a_k}$ clássico

$\downarrow$

$\boxed{\left(\hat{a}_k^{\dagger}\right),\ \left(\hat{a}_k\right) \quad \text{op. 2º quantiz.}}$

- Descrição em termos de op. "criação/destruição" permitem "adicionar" ou "remover" "partículas" / quasi-partículas $\Rightarrow$

$$[a_k, a_{k'}^{\dagger}] = \delta_{kk'}$$

- Estados são definidos em termos de números de ocupação $\rightarrow$

$$\hat{n}_k = a_k^{\dagger} a_k$$

- Estado de Vácuo do campo $|0\rangle$

$|0_{k_1}, 0_{k_2}, \ldots\rangle$ ↑ modos

$\hookrightarrow$ (energia de campo zero)

$\hookrightarrow$ Estado fundamental do campo quantizado

$\#$

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$\hookrightarrow$ vácuo $|0\rangle$ (est. fundamental)

$$|n\rangle = \frac{\left(a^{\dagger}\right)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

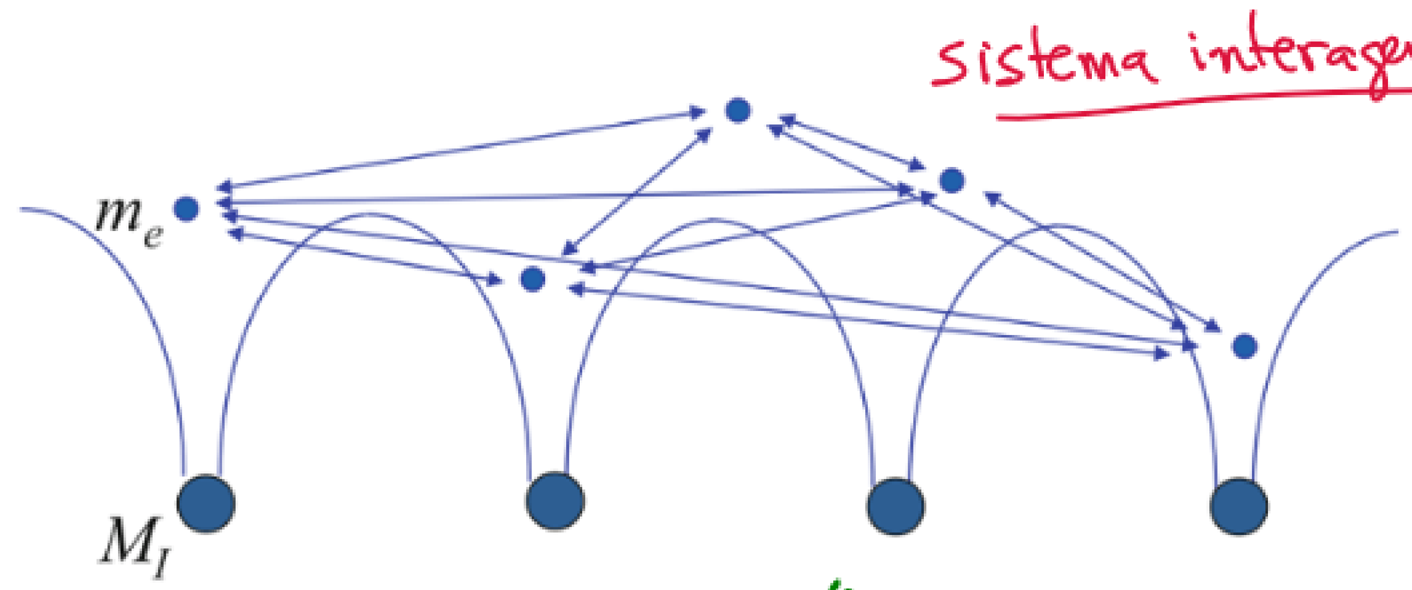
$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + 1/2\right)$$

Aplicações importantes – Sistemas de muitos corpos interagentes ("Many-body")

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_e} - \sum_{i,I}\frac{Z_I e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_I|} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_I \frac{\mathbf{P}_I^2}{2M_I} + \frac{1}{2}\sum_{I,J}\frac{Z_I Z_J e^2}{|\mathbf{R}_I - \mathbf{R}_J|}$$

* Veja slides p/ detalhes (PDF online no e-Disciplinas)

sistema interagente



2º quantização

Massa efetiva da quasi-partícula (ñ interagentes)