MONOTONICIDADE E FUNÇÕES INVERSAS

1. Funções monótonas e continuidade

Lembremos que $f : A \to \mathbb{R}$ é dita **crescente** em A se, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ e **estritamente crescente** em A se, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Analogamente,dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é **decrescente** A se, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ e **estritamente decrescente** Ase, para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é crescente ou decrescente, dizemos que ela é **monótona** A e se é estritamente crescente ou estritamente decrescente, dizemos que ela é **estritamente monótona** A.

Um fato importante sobre funções monótonas é a ausência de "oscilações". Mais precisamente, teremos sempre a existência dos limites laterais (nos pontos onde fizer sentido calculá-los). Mais exatamente, temos o seguinte

Proposição 1.1. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ função crescente em A. Se c é ponto de acumulação à esquerda de A então sempre existe o* $\lim_{x\to c-} f(x)$*, podendo ser finito ou $+\infty$. No primeiro caso* $\lim_{x\to c-} f = \sup\{f(x) : x \in A, x < c\}$*. Analogamente, se c é ponto de acumulação à direita sempre existe o* $\lim_{x\to c+} f(x)$ *podendo ser finito ou $-\infty$. No primeiro caso* $\lim_{x\to c+} f = \inf\{f(x) : x \in A, x > c\}$.

Dem. Suponhamos que c é ponto de acumulação à esquerda de A e denotemos por $A_- := \{x \in A, x < c\}$ $B := \{f(x) : x \in A_-\}$. Suponhamos que B é um conjunto limitado superiormente e seja $L = \sup B$. Afirmo que $\lim_{x\to c-} f(x) = L$. De fato, para todo $\epsilon > 0$,

Date: June 30, 2021.

existe $b \in B$ tal que $L - \epsilon < b \leq L$. Seja $a \in A_-$ tal que $f(a) = b$. Então $x \in [a, c[\Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq L$. Como ϵ é arbitrário, segue que $\lim_{x\to c-} f(x) = L$.

Suponhamos agora que B é um conjunto não limitado superiormente . Então, como f é crescente, para todo $M \in \mathbb{R}$, existirá $a \in A_-$ com $f(a) > M$. e, portanto, $f(x) > M$, para $x \in [a, c[$. Como M é arbitrário, Segue que $\lim_{x\to c-} f(x) = +\infty$.

$\square$

Observação 1.2. *No caso de funções decrescentes o resultado é análogo, com as devidas alterações óbvias. No que segue, vamos tratar apenas o caso de funções crescentes, fica como exercício a adaptação para o caso decrescente.*

Corolário 1.3. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ função crescente em A. Se c é ponto de acumulação à esquerda e à direita de A então sempre existem e são finitos os limites laterais $\lim_{x\to c-} f(x)$ e $\lim_{x\to c+} f(x)$. Em particular, o resultado vale para todo ponto de um intervalo I que não é extremo do intervalo.*

Dem. Basta observar que, nesse caso, a função f é limitada em uma vizinhança de c interceptada com A. $\square$

Observação 1.4. *Se b é a extremidade à direita de um intervalo I e $b \in I$, o resultado ainda vale para a derivada lateral à esquerda. Se a é a extremidade à esquerda do intervalo I e $a \in I$, o resultado ainda vale para a derivada lateral à direita .*

Corolário 1.5. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ função crescente. Se c é ponto interior de I, são equivalentes as seguintes condições:*

(1) *f é contínua em c.*
(2) $\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$.

(3) $\sup\{f(x) : x \in A, x < c\} = f(c) = \inf\{f(x) : x \in A, x > c\}$.

Dem. (1) e (2) são equivalentes para qualquer função, como visto. Agora se f é crescente segue que $\lim_{x\to c-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A, x < c\}$ e $\lim_{x\to c+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A, x > c\}$, portanto (2) e (3) são equivalentes neste caso. $\square$

Observação 1.6. *Se $A = I$ é um intervalo, f é crescente em I e b é extremo direito de I então f será contínua em b , se e somente se $b \in I$, e $f(b) = \sup\{f(x) : x \in I\} = \lim_{x\to b-} f(x)$. Se a é extremo esquerdo de I então f será contínua em a , s e somente se $a \in I$, e $f(a) = \inf\{f(x) : x \in I\} = \lim_{x\to a+} f(x)$.*

Definição 1.7. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é crescente no intervalo I e $c \in I$ não é uma das extremidades do intervalo, definimos o **salto de f em** c por*

$$s_f(c) = \inf\{f(x) : x > c\} - \sup\{f(x) : x < c\} = \lim_{x\to c+} f(x) - \lim_{x\to c-} f(x).$$

*Se a é a extremidade á esquerda de I e $a \in I$, definimos o **salto de f em** a por*

$$s_f(a) = \inf\{f(x) : x > a\} - f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) - f(a).$$

*Se b é a extremidade á direita de I e $b \in I$, definimos o **salto de f em** b por*

$$s_f(b) = f(b) - \sup\{f(x) : x < b\} = f(b) - \lim_{x\to b-} f(x)).$$

Proposição 1.8. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é crescente no intervalo I e $c \in I$ então f é contínua em c se e somente se $s_f(c) = 0$.*

Dem. Imediata a partir do corolário 1.5 e observação 1.6. $\square$

Vimos exemplos de funções descontínuas em todo um intervalo. Entretanto, isso não pode ocorrer para funções monótonas. De fato, vale o seguinte resultado.

Teorema 1.9. *Seja* $\subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função crescente. Então, o conjunto dos pontos* D *de descontinuidades de* f *é enumerável.*

Dem.

$\square$

2. Funções inversas

Lembremos que, se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é injetora, podemos definir sua inversa, com domínio $B = f(A)$, por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Em particular, podemos definir a inversa se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Vamos mostrar que, se $A = I$ é um intervalo e f é contínua, então a inversa também é contínua.

Lema 2.1. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo de extremos* a *e* b *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *estritamente crescente e contínua em* I*. Então* $f(I) = J$ *onde* J *é intervalo do mesmo tipo que* I *(ou seja, fechado se* I

for fechado, semi-aberto à esquerda se I o for, etc) de extremos $c = \lim_{x\to a+} f(x)$ e $d = \lim_{x\to b-} f(x)$.

Dem.

Teorema 2.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e contínua em I. Então a função inversa, f^{-1} definida no intervalo $J = f(I)$ é contínua.*

Dem.

$\square$

Exemplos 2.3.

(1) *Seja* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Vamos considerar dois casos:*

(n ***par****)* *Se consideramos* $f : [0, +\infty[$ *então* f *é estritamente crescente. Do Lema 2.1. obtemos que* $J = f(I) = [0, +\infty[$. *Do Teorema 2.2. segue que a inversa* $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *é contínua. Denotamos essa inversa por* $\sqrt[n]{x}$ *ou* $x^{1/n}$.

(n ***ímpar)*** *Nesse caso* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é estritamente crescente e, novamente, do Lema 2.1 e Teorema 2.2, temos uma inversa contínua* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *que também denotamos por* $\sqrt[n]{x}$ *ou* $x^{1/n}$.

(2) *Se* $m, n \in \mathbb{N}$, *definimos* $x^{m/n} := (x^m)^{1/n}$, *para* $x \geq 0$. *Se* $x > 0$, *definimos* $x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}}$. *É um exercício mostrar que essas definições não são ambíguas, isto é: se* $m/n = p/q$, *então* $x^{m/n} = x^{p/q}$ *e as propriedades conhecidas.*