1. Continuidade versus continuidade uniforme

Lembremos a definição de continuidade em um ponto x_0.

Seja Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função a valores reais e $x_0 \in A$, dizemos que f é contínua no ponto x_0, se

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : x \in A \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Como já vimos, o δ depende do valor dado de ϵ e, portanto, $\delta(\epsilon)$ é uma função de na definição. Além disso, se mudarmos o ponto x_0, teremos, em geral que escolher outro valor para $\delta(\epsilon)$ então, se queremos permitir mudança do ponto, uma notação mais precisa seria $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$.

Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = 1/x$, definida em $]0, +\infty[$. Temos $|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} < \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < |x \cdot x_0|\epsilon$. Como ϵ não pode depender de x, escolhemos inicialmente x em uma vizinhança conveniente de x_0, por exemplo $x \in]1/2x_0, 3/2x_0[$. Daí se $\delta < \epsilon \cdot x_0^2/2$, teremos

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} < \epsilon \frac{1/2x_0^2}{|x \cdot x_0|} < \epsilon \frac{1/2x_0}{|x|} < \epsilon.$$

Observemos que a medida que x_0 se aproxima de 0, precisamos tomar $\delta \to 0$. Assim, fixado ϵ nenhum valor positivo de δ funciona para todo $x \in]0, +\infty[$. Ou seja, **não conseguimos encontrar uma função $\delta(\epsilon)$, dependendo apenas de** ϵ (e não do ponto x_0). (Na verdade,isto não foi de fato provado, apenas fortemente indicado. Uma

Date: June 27, 2021.

prova pode ser feita,porém, com uma pequena mudança do argumento, ver nota abaixo.) [1]

Por outro lado, se f for restrita ao intervalo $[1, +\infty[$, basta tomar $\delta(\epsilon) = \min\{\epsilon x_0^2/2, x_0 \in [1, +\infty[\} = \epsilon/2$, para obter δ independente de x_0, cumprindo a condição: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Dizemos então que a continuidade é **uniforme** no intervalo $[1, +\infty[$. Mais precisamente:

Definição 1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função a valores reais. Diremos que f é* ***uniformemente contínua*** *em A se, para todo número real $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ de tal forma que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ sempre que $|y - x| < \delta$ e $y, x \in A$, Em linguagem simbólica:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : y, x \in A \wedge |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Observação 1.2. *Adotamos, na definição de continuidade uniforme, uma pequena mudança de notação porque, agora, a propriedade é simétrica nas variáveis x e y e ambos podem variar. Na definição de continuidade, o ponto x era mantido fixo e, por isto, usamos a notação x_0.*

[1] Tomando $\epsilon = 1$, $(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \Rightarrow (|f(x_0 + \delta/2) - f(x_0)| < 1) \Rightarrow (\frac{\delta}{2(x_0+\delta/2)x_0} < 1) \Rightarrow \delta < 2x_0^2 + \delta x_0 \Rightarrow \delta < \frac{2x_0^2}{1+x_0} \to 0$ quando _0 $\to 0$. Portanto não é possível encontrar δ que sirva para todo x_0.

É claro que, se f é uniformemente contínua em $A \subset \mathbb{R}$, então f é contínua em todo ponto $x \in A$. Por outro lado, não vale a recíproca, o exemplo acima mostra que nem toda função contínua em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em A. Temos, entretanto, o seguinte resultado importante:

Teorema 1.3. *Se $A \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua então f é uniformemente contínua em A.*

Dem.

$\square$

2. Funções Lipschitzianas

Entre as funções uniformemente contínuas num conjunto $A \subset \mathbb{R}$, uma classe importante para a qual a propriedade pode se estabelecida de maneira simples é constituída pelas **funções Lipschitzianas** .

Definição 2.1. *Dizemos que $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***Lipschtizana*** *(ou satisfaz a* ***condição de Lipschitz****) se, existe um número real $K \geq 0$, tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \textit{para quaisquer} \quad x, y \in A.$$

Observação 2.2. *Se $x \neq y$, a condição de Lipschitz pode ser escrita na forma $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq K$. Ou seja, o coeficiente angular da reta determinada por dois pontos do gráfico de f é menor ou igual a K.*

Proposição 2.3. *Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana então f é uniformemente contínua em A.*

Dem.

$\square$

Exemplos 2.4.

(1) *A função* $f(x) = x^2$ *não é Lipschitziana em* $\mathbb{R}$ *pois* $\frac{|y^2-x^2|}{|y-x|} = |y+x|$. *Em particular, se* $x = 0$, $\frac{|y^2-0^2|}{|y-0|} = |y| \to +\infty$. *quando* $|y| \to +\infty$.

(2) *A função* $f(x) = x^2$ *é Lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua em* $]-2,2[$ *pois, se* $x \neq y$, $\frac{|y^2-x^2|}{|y-x|} = |y+x| \leq |y| + |x| \leq 4$. *Observe que a continuidade uniforme segue também do fato de ser* f *uniformemente contínua em* $[-2,2]$, *pelo Teorema 1.3.*

(3) *A função* $f(x) = \sqrt{x}$ *é uniformemente contínua em* $[0,2]$ *pelo Teorema 1.3. Também é uniformemente contínua em* $[2,+\infty[$, *pois , se* $x \neq y$, $\frac{|\sqrt{y}-\sqrt{x}|}{|y-x|} =\leq \frac{1}{|\sqrt{y}+\sqrt{x}|} \leq 1/4$. *Portanto,* $f(x) = \sqrt{x}$ *é uniformemente contínua em* R^+. *Entretanto* $f(x) = \sqrt{x}$ *não satisfaz a condição de Lipschitz em* $[0,2]$, *pois, se* $y > 0$, $\frac{\sqrt{y}-\sqrt{0}}{y-0} = \frac{1}{\sqrt{y}} \to +\infty$, *quando* $y \to 0$.