FUNÇÕES CONTÍNUAS

1. Funções contínuas em intervalos

Funções contínuas definidas em compactos e, em particular, intervalos fechados gozam de propriedades adcionais.

Definição 1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função a valores reais. Dizemos que f é* ***limitada*** *se sua imagem for um conjunto limitado, isto é, se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

A propriedade de limitação de uma função pode depender do domínio.

Exemplos 1.2.

(1) *A função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ não é limitada.*
(2) *A função $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1/x$ é limitada.*
(3) *A função $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, não é limitada.*

Date: June 25, 2021.

Lembremos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se e somente se ele é fechado e limitado. Em particular, todo intervalo fechado é um conjunto compacto. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se e somente se, toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de A admite uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para uma ponto $x \in A$.

Teorema 1.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é limitada.*

Dem. Suponhamos que f não seja limitada. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A$ tal que $|f(x_n)| \geq n$. Seja $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_{n_k}) \to x \in A$. Como f é contínua em x, existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que f é limitada em $V(x) \cap A$. Como $f((x_{n_k})) \geq n_k \to +\infty$ e $(x_{n_k}) \in V(x) \cap A$, para k suficientemente grande, chegamos a uma contradição. $\square$

Observação 1.4.
(1) *Como todo intervalo fechado é compacto, o resultado vale, em particular, nesse caso.*
(2) *Se o intervalo não for limitado, ou não for fechado, o resultado não vale, como mostra o exemplo 1.2*
(3) *Se f não for contínua, o resultado não vale. basta tomar a função do exemplo 1;2 (1) no intervalo $[0, 1]$ e definí-la com qualquer valor no ponto 0.*

Podemos obter resultados um pouco mais fortes, a saber a existência de **valores máximos** e **valores mínimos** para funções contínuas em compactos.

Definição 1.5. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $B \subset A$. Dizemos que x^* é um* ***ponto de máximo de f em*** *B se $f(x) \leq f(x^*)$, para todo $x \in B$. Se $B = A$, dizemos também que x^* é* ***ponto de máximo absoluto de f.*** *O valor $f(x^*)$ é o* ***valor máximo de f em*** *B, ou* ***valor de máximo absoluto de*** *f. Dizemos que x_* é um* ***ponto de mínimo de f em*** *B se*

$f(x) \geq f(x_*)$, para todo $x \in B$. Se $B = A$, dizemos também que x_* é ***ponto de mínimo absoluto de f.*** *O valor $f(x_*)$ é o* ***valor mínimo de f em B****, ou* ***valor de mínimo absoluto de f****.*

Teorema 1.6. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe um ponto de mínimo de um ponto de máximo de f em A.*

Dem. □

Exemplo 1.7. *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ Os pontos -1 e 1 são ambos pontos de máximo absoluto de f (portanto não vale a unicidade) e 0 é ponto de mínimo absoluto.*

para o próximo resultado, precisamos que a função esteja definida em um intervalo.

Teorema 1.8. *(Do Anulamento) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < 0 < f(b)$, ou $f(a) > 0 > f(b)$ então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Dem. □

Observação 1.9. *Com base nesse resultado, podemos encontrar zeros de funções definiadas em um intervalo com a precisão que se desejar, pelo método da bissecção, desde que os valores nos extremos tenham sinais opostos.*

Teorema 1.10. *(do Valor Intermediário) Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a) < k < f(b)$, *ou* $f(a) > k > f(b)$ *então existe um ponto* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = k$.

Dem.

$\square$

Observação 1.11. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* $\inf\{f(x) : x \in A\} < k$ *e* $\sup\{f(x) : x \in A\}, > k$ *ainda podemos concluir que existe um ponto* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = k$*, usando a existência de máximo e mínimo e o Teorema do Valor Intermediário.*

O resultado seguinte engloba os acima obtidos para funções definidas em intervalos fechados.

Corolário 1.12. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua no intervalo fechado* $I = [a, b]$*, então a imagem* $f(I)$ *também é um intervalo fechado.*

Dem.

$\square$