FUNÇÕES CONTÍNUAS

1. Definição

A definição de continuidade (devida basicamente a Karl Werrstrass, por volta de 1870, o 'Principia Mathematica' de Newton foi publicado em 1687) é, formalmente, semelhante à definição de limite.

Definição 1.1. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função a valores reais e* $x_0 \in a$*. Diremos que* f *é* ***contínua*** *no ponto a se, para todo número real* $\epsilon > 0$*, existir* $\delta > 0$ *de tal forma que* $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ *sempre que* $0 < |x - a| < \delta$*, Em linguagem simbólica:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

se f não for contínua no ponto a, diremos que ela é ***descontinua*** *em a.*

Date: June 22, 2021.

Observação 1.2. *Na definição de continuidade, diferentemente da definição de limite, exigimos que o ponto a esteja no domínio da função f. Por outro lado,* ***não*** *estamos exigindo que a seja ponto de acumulação. Quando isto ocorre, a continuidade pode ser definida em termos de limite.*

Proposição 1.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função a valores reais e $a \in a$ um ponto de acumulação do conjunto A. Então f é contih nua no ponto a se e somente se:*

(1) *f está definida em a,*
(2) *Existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x) = L$,
(3) *f(a) = L.*

Observação 1.4. *Se $a \in A$ mas não é ponto de acumulação de A (ou seja a é ponto isolado do domínio de f, então f) é automaticamente contínua no ponto a.*

Exemplo 1.5.
Seja

$$f(x) := \begin{cases} x \ \mathit{se} \ 0 < x \leq 1 \\ -1 \ \mathit{se} \ -2 < x \leq 0 \\ 2 \ \mathit{se} \ x = 2 \end{cases}$$

A função f está definida em $A =]-2, 1] \cup \{2\}$. É contínua em todos os pontos de seu domínio exceto na origem.

A definição de continuidade também pode ser dado em termos de vizinhanças.

Proposição 1.6. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função a valores reais e $a \in A$. Diremos que f é **contínua** no ponto a se, para toda vizinhança $V(f(a))$ do ponto $f(a)$, existe uma vizinhança $V(a)$ do ponto a de tal forma que $f(x) \in V(f(a))$ sempre que $x \in V(a) \cap A$.*

Dem.

$\square$

Muitos resultados sobre continuidade seguem de propriedades provadas para limites.

A noção de continuidade de funções está pode ser relacionada ao limite de sequências.

Proposição 1.7. *Seja , $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$. Então f é contínua no ponto a se e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de A tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ vale que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Dem. A demonstração é consequência imediata do resultado que relaciona limite de sequências e limite de funções. É importante observar que, agora, não precisamos exigir $x_n \neq a$. □

Proposição 1.8. *(Conservação de sinal) Seja $f : A \subset \mathbb{R}$. Se f é contínua no ponto $a \in A$ e $f(a) > 0$, então existe uma vizinhança $V(x)$ do ponto a tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in V(a) \cap A$.*

Dem. Segue do resultado análogo provado para limites.

□

Proposição 1.9. *(Propriedades operatórias) Sejam , $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f e g são contínuas em $a \in A$ então então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ também o são. Se $g(a) \neq 0$, f/g também é contínua em a.*

Dem. Segue do resultado análogo provado para limites. □

Dos resultados acima, segue imediatamente o seguinte.

Corolário 1.10. *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in A$ com $f(a) > g(a)$. Então existe uma vizinhança $V(x)$ do ponto a tal que $f(x) > g(x)$, para todo $x \in V(a) \cap A$.*

Proposição 1.11. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}$, contínua no ponto $a \in A$ e $f : B \subset \mathbb{R}$, contínua no ponto $b = f(a) \in B$ e suponhamos que $f(A) \subset B$. Então, a função $g \circ f$ é contínua em $a \in A$*

Dem.

$\square$

Definição 1.12. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}$. dizemos que f é contínua no conjunto $B \subset A$ se f for contínua em todos os pontos de B.*

Observação 1.13. *Se f for contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos também que f é contínua, simplesmente.*

Exemplos 1.14.

(1) *A função $f(x) := \frac{x^2+3x-2}{x^2-2x+1}$ é contínua em $\mathbb{R}-\{1\}$. No ponto 1 f não está definida. Como $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ f não é limitada em nenhuma vizinhança do 1 e não é possível defini-la no ponto, de modo a torná-la contínua.*

(2) *A função $f(x) := \frac{2x^3-3x+1}{x^3-x^2+x-1}$ é contínua em $\mathbb{R}-\{1\}$. No ponto $x = 1$, f não está definida. Entretando, como $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+2x-1}{x^2+1} = 3/2$, a função definida por:*

$$g(x) := \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq 1 \\ 3/2 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

*é uma **extensão contínua** de f.*

(3) *Em geral, toda função polinomial é contínua em* $\mathbb{R}$ *e toda função racional* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *p e q polinômios é contínua no seu domínio* $Df = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

(4) *A função* $f(x) = sen\, x$, *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Como não temos uma definição precisa das funções trigonomé tricas, precisamos aceitar algumas propriedades e identidades bem conhecidas:*
- $sen\,(x + y) = sen\, x \cos y + sen\, y \cos x$.
- $|sen\, x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $|sen\, x| \leq 1$ *e* $|\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(5) *A função* $sen\frac{1}{x}$ *é contínua no seu domínio* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, por ser composta de funções contínuas.*

(6) $f(x) := \begin{cases} x sen\frac{1}{x} = 0 \ se \ x \neq 0 \\ 0 \ se \ x = 0. \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

(7) *A função de Dirichlet:* $D(x) := \begin{cases} 1 \ se \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ se \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ *é descontínua em todo ponto* $x \in \mathbb{R}$*.*

(8) *A função de Thomae:* $D(x) := \begin{cases} 0 \ \textit{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q \ \textit{se } x = p/q \in \mathbb{Q} \ \textit{e } p/q \ \textit{é irredu} \end{cases}$
é descontínua em todo ponto $x \in \mathbb{Q}$ *e contínua em todo ponto* $x \notin \mathbb{Q}$*.*