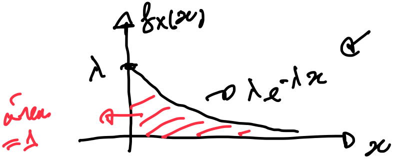
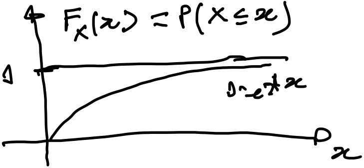
PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 15 e 16 - 2021

PTC-EPUSP





A Distribuição Exponencial

$X \rightarrow$ distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$. Neste caso,

$$\underline{f_X(x)} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\, du = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \cancel{-x e^{-\lambda x}\Big]_0^\infty}^{\,0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big]_0^\infty = 1/\lambda$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \; t < \lambda$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$ → exercício.

A Distribuição Exponencial

A função distribuição é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x f_X(u)du = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

$$P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = e^{-\lambda x}$$

no exemplo: $\lambda = \frac{1}{1000}$, $x = 400$ $\qquad P(X > 400) = e^{-\frac{400}{1000}} = e^{-0{,}4}$

A Distribuição Exponencial

A média é dada por

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

e a função momento gerador é

$$\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \ t < \lambda$$

e com isso obtemos que $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

$$P(\underbrace{X > t+s}_{A} \mid \underbrace{X > t}_{B}) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} \underset{\text{sem memória}}{=} P(X > s)$$

$A = \{X > t+s\}$, $B = \{X > t\}$ $AB = A = \{X > t+s\}$ pois $A \subset B$

Variável sem Memória

Uma variável aleatória X é dita ser sem memória se

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s), \;\; s, t \geq 0,$$

que é equivalente a:

$$P(X > t + s) = P(X > t)P(X > s), \;\; s, t \geq 0,$$

$$P(X > t+s) = P(X > t) \cdot P(X > s)$$

$X \sim$ exponencial com parâmetro λ

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$$

Variável sem Memória

Mostre que a variável exponencial é sem memória.

$$P(X > t+s) = e^{-\lambda(t+s)}$$

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(X > s) = e^{-\lambda s}$$

$$P(X > t+s) = P(X > t) \cdot P(X > s)$$

$$e^{-\lambda(t+s)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda s}$$

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(t)}$$

Variável sem Memória

Note que em geral

$$P(X > t+s|X > t) = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(t)}$$

$$\left.\frac{d\left(1 - F_X(t+s)\right)}{ds}\right|_{s=0} = -f_X(t)$$

Taxa de Falha

A função taxa de falha $r(t)$ é definida como a função densidade de probabilidade da vida útil de um item que já sobreviveu t unidades de tempo. Segue que

$$r(t) = -\frac{dP(X > t + s|X > t)}{ds}|_{s=0} = \frac{f(t)}{1 - F_X(t)}$$

Caso exponencial:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$$

$$r(t) = \frac{\lambda \cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} = \lambda$$

Taxa de Falha

Mostre que se X é exponencial com parâmetro λ então

$$r(t) = \lambda.$$

Taxa de Falha

Mostre que em geral

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(s)ds}.$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(s)\,ds}$$

Caso Exponencial : $r(t) = \lambda$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Confiabilidade : MTTF (mean time to failure)

$$MTTF = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Soma de Exponenciais Independentes

Mostre que se X_1 e X_2 são exponenciais independentes com parâmetro λ então

$$f_{X_1+X_2}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \;\; t \geq 0$$

Distribuição Gamma com parâmetros $(2, \lambda)$.

$$F_{X_1+X_2}(t) = P(X_1+X_2 \le t) =$$

$$\int_0^t F_X(t-s) f_X(s)\, ds = \int_0^t \left(1-e^{-\lambda(t-s)}\right) e^{-\lambda s}\, ds$$

$$= \int_0^t \left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t}\right) ds = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t\, e^{-\lambda t}$$

$$f_{X_1+X_2}(t) = \frac{d F_{X_1+X_2}(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Soma de Exponenciais Independentes

Generalizando para $X_1, \ldots, X_n$ exponenciais independentes com parâmetro λ então

$$f_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0$$

Distribuição Gamma com parâmetros (n, λ).

$$P(X_1 < X_2) = E\left(P(X_1 < X_2 \mid X_1)\right)$$

X_1, X_2 independents

$$P(X_1 < X_2 \mid X_1 = x_1) = P(X_2 > x_1 \mid X_1 = x_1) = P(X_2 > x_1)$$

$$= e^{-\lambda_2 x_1}$$

Exponenciais Independentes

Mostre que se X_1 e X_2 são exponenciais independentes com parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente então

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^\infty \underbrace{P(X_1 < X_2 \mid X_1 = x_1)}_{e^{-\lambda_2 x_1}} \underbrace{f_{X_1}(x_1)}_{\lambda_1 e^{-\lambda x_1}} dx_1$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \, dx_1$$

$$= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2) x_1} \, dx_1$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1} \, dx_1}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \quad , \quad P(X_2 < X_1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

O Processo de Poisson

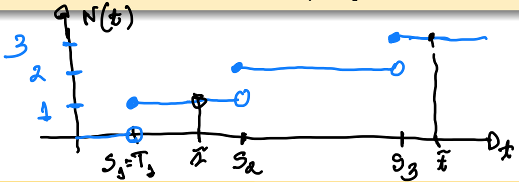
Um processo estocástico $\{N(t); t \geq 0\}$ é dito ser um processo de contagem se representa o número total de "eventos´´ que ocorreram até o instante de tempo t. Exemplo: $N(t) =$ número de pessoas que entrou em uma loja até o instante t. Portanto:

I) $N(t) \geq 0$

II) $N(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

III) Para $s < t$, temos que $N(s) \leq N(t)$.

IV) Para $s < t$, $N(t) - N(s)$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo $(s, t]$.



$N(\tilde{t}) - N(\tilde{r}) = 2$

$S_0 = 0$

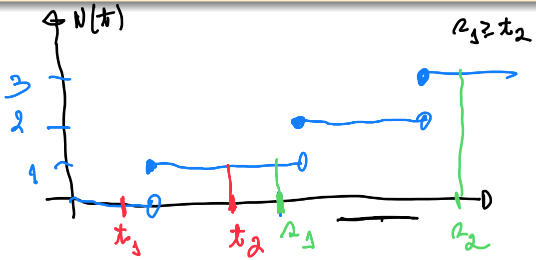
S_n = instante da n-ésima chegada,

T_n = intervalo entre a n-ésima e $(n-1)$-ésima chegada

$$T_n = S_n - S_{n-1}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

Incrementos Independentes

Um processo de contagem é dito possuir incrementos independentes se o número de eventos que ocorrem em intervalos de tempo disjuntos são variáveis aleatórias independentes. Por exemplo, o número de eventos que ocorreram até o tempo 10 ($N(10)$) deve ser independente do número de eventos ocorridos entre 10 e 15 ($N(15) - N(10)$).

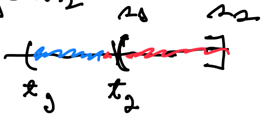


$N(s_2) - N(s_1)$ e $N(t_2) - N(t_1)$ são variáveis aleatórias independentes

$[t_1, t_2]$

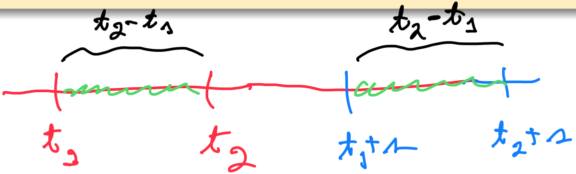
$[s_1, s_2]$

$s_1 = t_2$



Incrementos Estacionários

Um processo de contagem é dito possuir incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo de tempo depende somente do tamanho do intervalo de tempo, isto é, $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ possui a mesma distribuição que $N(t_2) - N(t_1)$, $t_2 > t_1$.

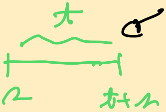


Processo de Poisson - Definição 1

Um processo de contagem $\{N(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$ se

I) $N(0) = 0$

II) possui incrementos independentes



III) Para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Possui incrementos estacionários pois

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$E(N(t)) \simeq \lambda t$

Processo de Poisson - Definição 1

De iii) é claro que $\{N(t); t \geq 0\}$ possui incrementos estacionários e que

$$E(N(t+s) - N(s)) = E(N(t)) = \lambda t$$

A condição iii) pode ser difícil de ser verificada. Vamos analisar uma outra definição equivalente em uma forma infinitesimal.

$\overset{\downarrow}{o}$ $\quad \underline{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

Processo de Poisson - Definição 2

Diremos que uma função $f(.)$ é $o(h)$ se

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Exemplo: $f(x) = x^2$. Se f e g são $o(h)$ então $f(.) + g(.)$, $f(.)g(.)$ e $cf(.)$ para c um número real, também são.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{h \downarrow 0} \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h \downarrow 0} h = 0$$

Processo de Poisson - Definição 2

Um processo de contagem $\{N(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$ se

i) $N(0) = 0$

ii) possui incrementos independentes e estacioários

iii)

$$P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

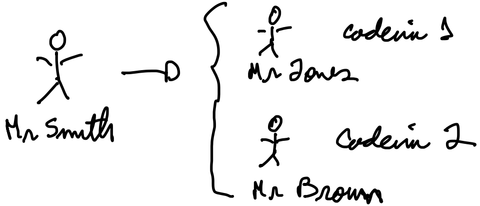
iv)

$$P(N(h) \geq 2) = o(h)$$

Teorema

Definição 1 e Definição 2 são equivalentes.

Exercício 1:



Na chegada de Mr Smith os 2 caixeiros estão ocupados.

Tempo de serviço dos caixeiros 1 e 2 são exponenciais independentes com média $\frac{1}{\lambda}$.

Qual é a prob. do Mr. Smith ser o último a sair da loja?

$$A = \{\text{Smith ser o último a sair}\}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } T_J \leq T_B \\ 2 & \text{se } T_J > T_B \end{cases}$$

$T_J \rightarrow$ tempo de serviço do John

$T_B \rightarrow$ tempo de serviço do Brown

$T_S \rightarrow$ tempo de serviço do Smith

Complica un pouco.
Cadeira 1 → λ_1
cadeira 2 → λ_2

$$P(A) = E(P(A \mid Y))$$

$$P(Y=1) = P(T_J \le T_B) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(Y=2) = P(T_B < T_J) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(A \mid Y=1) = P(T_J^1 > T_B) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(A \mid Y=2) = P(T_J^2 > T_J) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

⇓

$P(A) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = P(A \mid Y=1)\,P(Y=1) + P(A \mid Y=2)\,P(Y=2)$$

$$= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

Exercício 2: Custo em um acidente de carro tem distribuição exponencial com média R\$ 1.000,00. O seguro paga o que exceder R\$ 400,00. Quanto o seguro paga em média por acidente?

$Z \to$ valor que o seguro vai pagar em um acidente.

$X \to$ valor do acidente $\to$ exponencial com $\lambda = \frac{1}{1000}$

$$Z = (X - 400)^+ \qquad x^+ = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Queremos calcular $E(Z)$.

$$E(Z) = E(E(Z \mid Y)) \qquad Y = \begin{cases} 1 \text{ se } X > 400 \\ 0 \text{ se } X \leq 400 \end{cases}$$

$\to \quad E(Z \mid Y=1) = E(X-400 \mid X>400) = 1000 \; (=E(X))$

$$P(X-400 > x \mid X>400) \overset{x \geq 0}{=} P(X > 400+x \mid X>400)$$

exponencial é = sem memória

$$P(X>x) = e^{-\frac{1}{1000}x}$$

$\to \quad E(Z \mid Y=0) = E(\cancel{(X-400)^+} \mid X \leq 400) = 0$

$$P(Y=1) = P(X>400) = e^{-\frac{400}{1000}} = e^{-0,4}$$

$$P(Y=0) = P(X \leq 400) = 1-e^{-0,4}$$

$$E(Z) = E(Z \mid Y=1)\,P(Y=1) + \cancel{E(Z \mid Y=0)}\,P(Y=0) = 1000 \cdot e^{-0,4}$$

$$\cong R\$\ 670,32.$$

Def. 1 $\Rightarrow$ Def. 2

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\lambda h = \left(1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} - \cdots\right)\lambda h$$

$$= \lambda h \underbrace{- (\lambda h)^2 + \frac{(\lambda h)^3}{2} - \cdots}_{o(h)}$$

$$= \lambda h + o(h)$$

$$P(N(h)\geq 2) = 1 - P(N(h)=0) - P(N(h)=1)$$

$$P(N(h)=0) = e^{-\lambda h}$$

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\lambda h$$

$$P(N(h) \geq 2) = 1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}\lambda h =$$

$$= \lambda h - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \cdots - \left(1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} - \cdots\right)\lambda h$$

$$= \cancel{\lambda h} - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \cdots - \cancel{\lambda h} + (\lambda h)^2 - \frac{(\lambda h)^3}{2} \cdots$$

$$= o(h)$$

Def. 2 $\Rightarrow$ Def 1.

$$P_n(t) = P(N(t) = n)$$

$$\frac{d P_n(t)}{dt} = \dot{P}_n(t)$$

Mostre que:

$$\begin{cases} \dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) \\ \dot{P}_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \\ \underline{\text{Solução}}: P_n(t) = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} \end{cases}$$

Exemplo: Suponha que o tempo gasto em um banco (T) seja modelado por uma distribuição exponencial com média de 10 mins.

a) Qual é a prob. do cliente gastar mais do que 15 mins?

b) Dado que o cliente já gastou 15 mins, qual é a prob. de gastar mais 10 mins?

a) $\frac{1}{\lambda} = 10$ mins. $P(T > t) = e^{-t/10}$.

$t = 15$ mins $\Rightarrow P(T > 15) = e^{-15/10} = e^{-3/2} \approx 22\%$

b) $P(T > 10+15 \mid T > 15) \underset{\text{sem memória}}{\overset{\text{T.e}}{=}} P(T > 10) = e^{-1}$

$= 36{,}78\%$.

$T_n \to$ intervalo entre a chegada n e a chegada $n-1$.

Distribuição entre chegadas

Seja T_1 o instante da 1a chegada e T_n o intervalo de tempo entre a n-ésima e $n-1$-ésima chegada, $n = 1, 2, \ldots$ ($T_0 = 0$). A sequência $\{T_1, T-2, \ldots\}$ é chamada de sequência de tempos entre chegadas.

Teorema

$\{T_1, T_2, \ldots\}$ são independentes e exponencialmente igualmente distribuídas com parâmetro λ.

$$\underbrace{\{T_1 > t\}}_{\text{1ª chegada ocorre depois de } t} = \underbrace{\{N(t) = 0\}}_{\text{no instante } t \text{ o } N(t)=0}$$

1ª chegada ocorre depois de t = no instante t o $N(t) = 0$

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow$ T_1 é exponencial com parâmetro λ.

$$P(T_2 > t) = E\left(P(T_2 > t \mid T_1)\right) =$$

$$\int_0^\infty \underbrace{P(T_2 > t \mid T_1 = s)}_{e^{-\lambda t}} \lambda e^{-\lambda s}\, ds$$

$N(s) = 1,$
$N(u) = 0,$
$0 \leq u < s$

$$P(T_2 > t \mid T_1 = s) = P(\underline{N(t+s) - N(s)} = 0 \mid \cancel{T_1 = s})$$

incrementos = independentes

$$P(N(t+s) - N(s) = 0) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$P(T_2 > t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda z}\, dz =$$

$$= e^{-\lambda t} \underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda z}\, dz}_{=1} = e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow T_2$ exponencial com parâmetro λ.

Exercício: Pessoas chegam a um local de acordo com um processo de Poisson com taxa de $\lambda = 1$ / hora.

a) Qual é o instante esperado da chegada da 11º pessoa?

b) Qual a prob. do tempo entre a 10º e 11º pessoa exceder 2 horas?

$E(T_i) = 1$ hora

a) $\lambda = 1$ / hora, $\quad \frac{1}{\lambda} = 1$ hora.

$S_{11} \to$ instante da chegada da 11ª pessoa.

$$S_{11} = \sum_{j=1}^{11} T_i$$

$$E(S_{11}) = \sum_{i=1}^{11} \overbrace{E(T_i)}^{1} = 11 \text{ horas.}$$

b) $P(T_{11} > 2) = e^{-1 \cdot 2} = e^{-2} = 0{,}133$

Distribuição da n-ésima chegada

Seja T_n o instante da n-ésima chegada (ou tempo de espera par ao n-ésimo evento). Segue que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \;\; n \geq 1.$$

Portanto S_n possui distribuição gama com parâmetros (n, λ). Isto também pode ser visto da seguinte forma:

$$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$$

a $n^{\text{ésima}}$ chegada ocorreu antes de t

Temos pelo menos n chegadas até o instante t.

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n)$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

$$f_{S_n}(t) = \frac{d F_{S_n}(t)}{dt} = \sum_{j=n}^{\infty} \left[\frac{d (\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{dt} \right] \frac{1}{j!}$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda j (\lambda t)^{j-1}}{j (j-1)!} e^{-\lambda t} - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

$$= \lambda \left\{ \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\} e^{-\lambda t}$$

$$= \underbrace{\lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}}$$

distribuição gama com parâmetros (n, λ)

S_n soma de exponenciais independentes com parâmetro λ.

Outras Propriedades do Processo de Poisson

Seja $\{N(t); t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, onde cada chegada pode ser classificada como sendo do tipo 1, com probabilidade p, ou tipo 2, com probabilidade $1 - p$, independente de todos os outros eventos. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ o número de eventos do tipo 1 e tipo 2 respectivamente até o instante t. Logicamente

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B)$$

Teorema

$\{N_1(t); t \geq 0\}$ e $\{N_2(t); t \geq 0\}$ são ambos processos de Poisson com taxas respectivamente λp e $\lambda(1-p)$. Além disso são independentes.

$$P\big(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m\big) = P\big(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m,\ N(t)=n+m\big)$$

$$= P\big(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m \,\big|\, N(t)=n+m\big)\, P\big(N(t)=n+m\big)$$

Mostre que

$$P\left(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m \,\middle|\, N(t)=n+m\right) = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m$$

é binomial com parâmetros $(n+m, p)$

$$P\left(N(t)=n+m\right) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$P\left(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m\right) = \frac{\cancel{(n+m)!}}{n!\,m!} p^n (1-p)^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{\cancel{(n+m)!}} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-(p+(1-p))\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!} \frac{((1-p)\lambda t)^m}{m!}$$

$$= \underbrace{\left[e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!} \right]}_{P(N_1(t)=n)} \underbrace{\left[e^{-(1-p)\lambda t} \frac{((1-p)\lambda t)^m}{m!} \right]}_{P(N_2(t)=m)}$$

$$P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m) \overbrace{=}^{N_1(t),\ N_2(t) \text{ são independentes}} P(N_1(t)=n)\, P(N_2(t)=m)$$

$$P(N_1(t) = n) = e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!}$$

$N_1(t)$ é Poisson com parâmetro λp

$$P(N_2(t) = m) = e^{-(1-p)\lambda t} \frac{((1-p)\lambda t)^m}{m!}$$

$N_2(t)$ é Poisson com parâmetro $(1-p)\lambda$.

Lembrar que se $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2 respectivamente então $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exemplo: Clientes chegam a um banco de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 10$/hora.
A prob. de ser um homem é 3/5 e de ser mulher é 2/5.

a) Qual é a prob. de se ter 5 mulheres chegando em 2 hrs dado que o total de chegadas em 2 hrs é de 10 pessoas?

$$P(N_2(2)=5 \mid N(2)=10) = P(N_2(2)=5 \mid N_1(t)+N_2(t)=10)$$

$$= (\text{binomial } n=10,\ p=\tfrac{2}{5}) \quad \binom{10}{5}\left(\tfrac{2}{5}\right)^5\left(\tfrac{3}{5}\right)^5 = \frac{\cancel{10}.\cancel{9}.\cancel{8}.7.\cancel{6}}{\cancel{5}.\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}}\left(\tfrac{2}{5}\right)^5\left(\tfrac{3}{5}\right)^5$$

$= 20{,}06\%$

b) Repita o anterior considerando a chegada de 10 homens em 2 hs?

$$P(N_2(2)=5 \mid N_1(2)=10) \underset{\text{independentes}}{\overset{N_1, N_2}{=}} P(N_2(2)=5) = e^{-4.2}\frac{(4.2)^5}{5!}$$

$\lambda_2 = \frac{2}{\cancel{5}} \cdot 1\cancel{0}^{2} = 4 \mid h \qquad = e^{-8} \frac{8^5}{5!} = 9{,}16\,\%$

Exercício

Mostre que

$$P(T_1 < s | N(t) = 1) = \frac{s}{t}, \quad \underline{s \in (0, t)}$$

isto é, é uma uniforme no intervalo $(0, t)$.

$$P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{P(T_1 < s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$\{T_1 < s\} \cap \{N(t) = 1\} = \{N(s) = 1\} \cap \{N(t) - N(s) = 0\}$$

$$= \frac{P\left(N(s)=1,\ N(t)-N(s)=0\right)}{P\left(N(t)=1\right)}$$

incrementos independientes

$$= \frac{P\left(N(s)=1\right)\ P\left(N(t)-N(s)=0\right)}{P\left(N(t)=1\right)}$$

incrementos estacionarios

$$= \frac{P\left(N(s)=1\right) \cdot P\left(N(t-s)=0\right)}{P\left(N(t)=1\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\lambda} s\, e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-\cancel{s})}}{\cancel{\lambda} t\, e^{-\lambda t}}$$

$$= \left(\frac{s}{t}\right) \frac{\cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} = \frac{s}{t}$$

uniforme no intervalo $(0, t)$

Processo de Poisson não Homogêneo

Um processo de contagem $\{N(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\lambda(t) \geq 0,\ t \geq 0$, se

i) $N(0) = 0$

ii) $\{N(t); t \geq 0\}$ possui incrementos independentes e estacioários

iii)
$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$

iv)
$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

Processo de Poisson não Homogêneo

Definindo

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

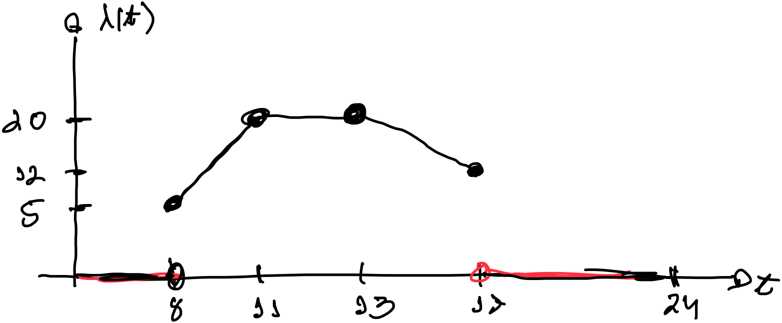
pode-se mostrar que para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!},$$

$$E(N(t+s) - N(t)) = m(t+s) - m(t)$$

Exemplo: Chegadas em uma loja tem a seguinte taxa

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 8 \\ 5 + 5(t-8), & 8 \le t \le 11 \\ 20, & 11 \le t \le 13 \\ 20 - 2(t-13), & 13 \le t \le 17 \\ 0, & 17 \le t \le 24 \end{cases}$$



a) Qual é a prob. de se ter 5 chegadas entre 10 e 12 hs?

$$\rightarrow m(12) - m(10) = \int_0^{12} \lambda(t)\,dt - \int_0^{10} \lambda(t)\,dt =$$

$$\int_{10}^{12} \lambda(t)\,dt = \int_{10}^{11} \left\{ 5 + 5(t-8) \right\} dt +$$

$$\int_{11}^{12} 20\,dt = 5 + 5 \cdot \frac{t^2}{2} \Big]_{10}^{11} - 40 + 20$$

$$= 37{,}5$$

$$P\left(N(12)-N(10)=5\right)=e^{-37{,}5}\cdot\frac{37{,}5^{5}}{5!}$$

$$\cong 0$$

b) Qual é o número esperado de chegadas entre 10 e 12 hs?

$$E\left(N(12)-N(10)\right)=m(12)-m(10)=37{,}5.$$

Processo de Poisson Composto

Um processo estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ é dito ser um processo de Poisson composto se pode ser escrito como

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \;\; t \geq 0$$

onde $\{N(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$ e $\{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$, é uma família de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas, que também são independentes de $\{N(t); t \geq 0\}$.

Observação: $Y_i = 1 \Rightarrow X(t) = N(t)$

Processo de Poisson

Exemplo: Y_i = quantia gastos em uma loja.

$N(t)$ = número de clientes que chega na loja até o instante t.

$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \rightarrow$ total arrecadado até o instante t.

Qual é o valor esperado de $X(t)$?

E a variância de $X(t)$?

$$E(X(t)) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = E\left(E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\middle|\, N(t)\right]\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\middle|\, N(t)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \,\middle|\, \cancel{N(t)=n}\right)$$

$\{Y_i\}$ independientes de $N(t)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(Y_1) = n\,E(Y_1)$$

$$E(X(t)) = E\left(N(t)\,E(Y_1)\right) = \underbrace{E(N(t))}_{\lambda t}E(Y_1)$$

$$= \lambda t\, E(Y_1)$$

Processo de Poisson Composto

Mostre que

$$E(X(t)) = \lambda t E(Y_1)$$
$$Var(X(t)) = \lambda t(Var(Y_1) + E(Y_1)^2)$$

Mostre que

$$Var(X(t)) = \lambda t \left\{ \overbrace{Var(Y_1) + E(Y_1)^2}^{E(Y_1^2)} \right\}$$

$$\mathrm{Var}(Y_j) = E(Y_j^2) - E(Y_j)^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Var}(Y_j) + E(Y_j)^2 = E(Y_j^2)$$