Nivelamento de Matemática – FEAUSP – 2021.1 ✏
Prof.ª Tatiana Paim ✍
paim@ime.usp.br ✉

5 – MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Lista de Exercícios 1

1 Matrizes

Exercício 1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})$ em cada caso:

a. A é do tipo 2×3, e $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j\ , & \text{se } i = j \\ i - 2j\ , & \text{se } i \neq j \end{cases}$

b. A é quadrada de ordem 4 e $a_{ij} = \begin{cases} 2i\ , & \text{se } i < j \\ i - j\ , & \text{se } i = j \\ 2j\ , & \text{se } i > j \end{cases}$

c. A é do tipo 4×2, e $a_{ij} = \begin{cases} 0\ , & \text{se } i \neq j \\ 3\ , & \text{se } i = j \end{cases}$

d. A é quadrada de terceira ordem e $a_{ij} = 3i - j + 2$.

e. A é de ordem 2×4 e $a_{ij} = \begin{cases} 2i + j\ , & \text{se } i = j \\ i^2 - j\ , & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Exercício 2. Determine x e y tais que:

a. $\begin{bmatrix} 2x + y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} x^2 & y \\ x & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 3. Cinco amigos, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, viajaram juntos num fim de semana e, durante a viagem, as despesas foram divididas igualmente entre eles. Entretanto, para facilitar o troco, algumas vezes um emprestava dinheiro para o outro.
Considere que nas matrizes S e D abaixo estão registrados os valores, em reais, que cada um emprestou para o outro no sábado e no domingo, respectivamente, sendo que o elemento da linha i e da coluna j representa o que o amigo A_i emprestou ao amigo A_j nesse dia, com i e j variando de 1 a 5.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 15 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 18 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao final da viagem, o amigo A_4 ainda devia aos demais amigos, em reais, a quantia de:

(a) 10 (b) 15 (c) 31 (d) 41 (e) 72

2 Operações com Matrizes

Exercício 4. Determine a e b para que a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2a - b \\ a + b & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

seja simétrica.

Exercício 5. Determine a, b, e c para que

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 2a \\ c & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Exercício 6. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Determine a matriz X em cada caso:

a. $X = 2A - 3B$

b. $X + A = B - C^t - 2X$

c. $X + B^t = 3A^t + \frac{1}{2}C$

Exercício 7. Sabendo-se que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} y & 36 & -7 \\ x^2 & 0 & 5x \\ 4 - y & -30 & 3 \end{bmatrix}$$

é igual à sua transposta, qual o valor de $2x + y$?

Exercício 8. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule $A^2 - 6A + 5I_2$. Classifique a matriz resultado.

Exercício 9. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\ C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

calcule:

a. $A + B + C$

b. $2A + C$

c. AB

d. BA

e. AC

f. $A^2 - B^2$

Exercício 10. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^2, A^3, A^4 e A^n, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 1$.

3 Matriz inversa e operações elementares

Exercício 11. Dadas $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine A^{-1}, B^{-1} e $(AB)^{-1}$.

Exercício 12. Encontre, se possível, A^{-1}, onde:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ d. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ f. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 13. Que condições $\lambda \in \mathbb{R}$ deve satisfazer para que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

seja inversível?

4 Determinantes

Exercício 14. Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$:

a. Utilizando a regra de Sarrus;

b. Utilizando a expansão em cofatores.

Exercício 15. Nos itens 1–6, calcule o determinante da matriz usando (a) a expansão em cofatores e (b) as operações elementares com as linhas para introduzir zeros na matriz (triangularização).

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

Exercício 16. Seja $\det A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 10$. Calcule, usando as propriedades dos determinantes:

a. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d/2 & e/2 & f/2 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g+d & h+e & i+f \\ d & e & f \end{vmatrix}$

Exercício 17. Calcule x para que $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & -x \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2x & x \end{vmatrix} = 14$.

Exercício 18. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 4$ e $\det B = 5$. Determine:

a. $\det(AB)$

b. $\det(3A)$

c. $\det(AB)^{-1}$

d. $\det(-A)$

e. $\det(A^{-1}B)$

Exercício 19. Encontre os valores de k com os quais A é invertível.

a. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$ d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 20. Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Sabe-se que $A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$, isto é, A multiplicada por si mesma n vezes. Então o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$ é igual a:

(a) 1 (b) -31 (c) -875 (d) -11 (e) -9

Bons estudos! :)

Gabarito:

1.

a. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. a. $x = 5$; $y = 1$ b. $x = y = -1$

3. (a)

4. $a = 1$; $b = 3$

5. $a = 3$; $b = -1$; $c = 2$

6. a. $\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 14 & -6 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

7. -1

8. $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.

a. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 6 & -8 & -14 \\ -3 & 11 & 14 \\ 3 & -8 & -11 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{bmatrix}$

10. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,
$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 39 & -23 \\ -22 & 13 \end{bmatrix}$

12.

a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$ b. A não é inversível

c. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ d. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ f. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\lambda \neq 1$

14. a. 21 b. 21

15.
1. -84 3. -290 5. -1099
2. 24 4. -10 6. 329

16. a. -10 b. -10 c. 5 d. 10 e. -20 f. -10

17. $x = 1$ ou $x = -\frac{23}{9}$

18. a. 20 b. $4 \cdot 3^n$ c. $1/20$ d. 4, se n for par; -4 se n for ímpar e. -20 f. $5/4$

19. a. $k \neq \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ b. $k \neq \pm 2$
c. $k \neq -1$ d. $k \neq \dfrac{1}{4}$

20. (d)