Matemática Aplicada à Economia III – Lista 1 – Programação Não-Linear

1) Suponha que o problema é:
   Minimize $C = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
   Sujeita a $g^i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq r_i$
   e $x_j \geq 0 \; \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{pmatrix}$
   Escreva a função de Lagrange, tome as derivadas $\frac{\partial Z}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial Z}{\partial \lambda_i}$ e escreva a versão expandida das condições de Kuhn-Tucker para mínimo.

2) Converta o problema de minimização do problema anterior em um problema de maximização, formule a função de Lagrange, tome as derivadas com relação a x_j e λ_i, e aplique as condições de Kuhn-Tucker para máximo. Os resultados são consistentes com os obtidos no problema anterior?

3) Maximize $\pi = x_1$
   Sujeita a $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$
   E $x_1, x_2 \geq 0$
   Resolva graficamente e verifique se o ponto de solução ótima satisfaz (a) a qualificação de restrição e (b) as condições de Kuhn-Tucker.

4) Minimize C$= x_1$
   Sujeita a $x_1^2 - x_2 \geq 0$
   E $x_1, x_2 \geq 0$
   Resolva graficamente. A solução ótima ocorre em uma cúspide? Verifique se a solução ótima satisfaz (a) a qualificação de restrição e (b) as condições de Kuhn-Tucker para mínimo.

5) Minimize C$= x_1$
   Sujeita a $-x_2 - (1 - x_1)^3 \geq 0$
   E $x_1, x_2 \geq 0$
   Mostre que (a) a solução ótima $(x_1^*, x_2^*) = (1,0)$ não satisfaz as condições de Kuhn-Tucker, mas (b) que, introduzindo um novo multiplicador $\lambda_0 \geq 0$, e modificando a função de Lagrange para a forma
   $$Z_0 = \lambda_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 [r_i - g^i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$
   as condições de Kuhn-Tucker podem ser satisfeitas em (1,0).

6) Uma consumidora mora em uma ilha onde ela produz dois bens, x e y, de acordo com o limite de possibilidade de produção $x^2 + y^2 \leq 200$, e ela mesma consome todos os bens. Sua função utilidade é $U = xy^3$. A consumidora também enfrenta uma restrição ambiental imposta à produção total de ambos os bens. A restrição ambiental é dada por $x + y \leq 20$.
   a) Escreva as condições de primeira ordem de Kuhn-Tucker.
   b) Ache os x e y ótimos da consumidora. Identifique quais restrições são vinculadoras.

7) Uma empresa fornecedora de energia elétrica está construindo uma estação em um país estrangeiro e tem de planejar sua capacidade. A demanda de energia no período de pico é dada por $P_1 = 400 - Q_1$ e a demanda fora do período de pico é dada por

$P_2 = 380 - Q_2$. O custo variável é 20 por unidade (pago em ambos os mercados) e a capacidade custa 10 por unidade e é paga somente uma vez e usada em ambos os períodos.

a) Escreva a função de Lagrange e as condições de Kuhn-Tucker para esse problema.
b) Ache as produções e a capacidade ótimas para esse problema.
c) Que porção da capacidade é paga por mercado (isto é, quais são os valores de λ_1 e λ_2)?
d) Agora suponha que o custo de capacidade é 30 centavos por unidade (pago somente uma vez). Ache quantidades, capacidade e a porção da capacidade paga por mercado (isto é, λ_1 e λ_2).

8) Dado o problema: Minimize $C = F(x)$
Sujeita a $G^i(x) \geq r_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$
e $x > 0$

a) Converta-o para um problema de maximização.
b) Neste problema, quais são as equivalentes das funções f e g^i no teorema de suficiência de Kuhn-Tucker?
c) Por consequência, quais as condições de concavidade-convexidade devem ser impostas às funções F e G^i para fazer com que as condições suficientes para um máximo sejam aplicáveis aqui?
d) Com base no problema acima, como você enunciaria as condições de Kuhn-Tucker suficientes para um mínimo?

9) O enuncie o teorema de suficiência de Kuhn-Tucker aos problemas a seguir:

a) Maximize $\pi = x_1$
sujeita a $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$
e $x_1, x_2 \geq 0$
b) Minimize C= $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$
Sujeita a $x_1 + x_2 \geq 4$
e $x_1, x_2 \geq 0$
c) Minimize C= $2x_1 + x_2$
Sujeita a ${x_1}^2 - 4x_1 + x_2 \geq 0$
e $x_1, x_2 \geq 0$

10) Quais das seguintes funções são matematicamente aceitáveis como a função objetivo de um problema de maximização que se qualifica para a aplicação do teorema de suficiência de Arrow-Enthoven?

a) $f(x) = x^3 - 2x$
b) $f(x_1, x_2) = 6x_1 - 9x_2$
c) $f(x_1, x_2) = x_2 - \ln(x_1)$

11) A qualificação de restrição de Arrow-Enthoven é satisfeita, dado que as restrições de um problema de maximização são:

a) $x_1 + (x_2 - 5)^2 \leq 4 \;\; e \;\; 5x_1 + x_2 < 10$
b) $x_1 + x_2 \leq 8 \;\; e \;\; x_1 x_2 < -8 \quad (nota\text{: } -x_1 x_2 \; não\ é\ convexa)$

12) Um consumidor tem a seguinte função utilidade: $U(x, y) = x(y + 1)$, onde x e y são quantidades de dois bens de consumo cujos preços são P_x e P_y, respectivamente. O consumidor também tem um orçamento de B. Por conseguinte, a função de Lagrange do consumidor é $x(y + 1) + \lambda(B - P_x x - P_y y)$

a) Encontre pelas condições de primeira ordem, expressões para as funções demanda. Que tipo de bem é y? Em particular, o que acontece quando $P_y > B$?

b) Verifique se esse é um máximo verificando as condições de segunda ordem. Substituindo x* e y* na função utilidade, encontre uma expressão para a função utilidade indireta $U^* = U(P_x, P_y, B)$ e deduza uma expressão para a função dispêndio $E = E(P_x, P_y, U^*)$

c) Esse problema pode ser reformulado como o seguinte problema dual
Minimize $P_x x + P_y y$
Sujeita a $x(y + 1) = U^*$
Encontre os valores de x e y que resolvem esse problema de minimização e mostre que os valores de x e y são iguais às derivadas parciais da função dispêndio, $\frac{\partial E}{\partial P_x}$ e $\frac{\partial E}{\partial P_y}$, respectivamente.