Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 4 - Determinantes

Objetivos dessa aula:

- calcular determinantes de matrizes:
  - com ordem $n \leq 3$ por regras práticas;
  - usando a expansão em cofatores;
  - pelo método de redução por linhas (triangulação);
- apresentar algumas propriedades importantes dos determinantes.

1. DETERMINANTE ($n \leq 3$)

Definição. Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja A uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos de **determinante da matriz A** (indicamos por det A ou $|A|$) o número que podemos obter operando com os elementos de A da seguinte forma:

1º) Se A é de ordem $n = 1$, então det A é o único elemento de A, ou seja, $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$

Por exemplo:

a) $A = [6] \Rightarrow \det A = 6$

b) $B = \left[\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \det B = \frac{1}{2}$

c) $C = [-10] \Rightarrow \det C = -10$

2º) Se A é de ordem $n = 2$, então det A é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 1.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - (-1).4 = 6 + 4 = 10$

b) $\begin{vmatrix} \cos x & sen\ x \\ sen\ y & \cos y \end{vmatrix} = \cos x.\cos y - sen\ x\,.sen\ y = \cos(x + y)$

3º) Se A é de ordem $n = 3$, isto é, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, definimos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

PARA MEMORIZAR

i) Repetimos ao lado da matriz, as duas primeiras colunas;

ii) Os termos precedidos pelo sinal + são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal: $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$; $a_{13}a_{21}a_{32}$

iii) Os termos precedidos pelo sinal – são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária: $-a_{13}a_{22}a_{31}$; $-a_{11}a_{23}a_{32}$; $-a_{12}a_{21}a_{33}$

Ou seja:

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Este dispositivo prático é conhecido como **regra de Sarrus** para o cálculo de determinante de ordem 3.

Exemplo 2.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

- **Solução:**

$$a)\ \left|\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

- - - + + +

$$\det A = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$

$$b)\ \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{matrix}\right|$$

$$b)\ \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

- - - + + +

$$\det B = 16 + 6 - 1 - 6 - 2 + 8 = 21$$

2. DETERMINANTES POR EXPANSÃO EM COFATORES

Definição. Se A for uma matriz quadrada, então **o menor da entrada** a_{ij} é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O número $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ é denominado **cofator da entrada** a_{ij}.

Exemplo 3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O cofator de a_{11} é

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

Definição. Se A for uma matriz quadrada de ordem n, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado **determinante** de A.

As próprias somas são chamadas **expansões em cofatores** de det A, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det\ A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

[expansão em cofatores ao longo da coluna j]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det\ A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

[expansão em cofatores ao longo da linha i]

Exemplo 4. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: Fixando a 2ª linha, obtemos:

$$\det A = 4.A_{21} + 2.A_{22} + 0.A_{23} + 0.A_{24} = 4.A_{21} + 2.A_{22}$$

Calculando os cofatores:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{matrix}$$

-   -   -   +   +   +

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

= -1. (-6+0-24-60+0-6) = -1.(-106) = 96

$$A_{22} = (-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

\- \- \- + + +

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

= 1. (3+0+12-24-0+3)= -6

Portanto, $\det A = 4. A_{21} + 2. A_{22} = 4.96 + 2.(-6) = 384 - 12 = 372$

Propriedades dos Determinantes.

1. Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz A são nulos, det $A = 0$.
2. det $A =$ det A^t .
3. Se multiplicarmos uma linha da matriz A por uma constante $k \neq 0$, o determinante da nova matriz, B, fica multiplicado por esta constante. Isto é, det $B = k$ det A. Mais geralmente: det $(kA) = k^n$ det A
4. Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.
5. O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais é zero.

Relação	Operação
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{11} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	A primeira linha de A é multiplicada por k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	A primeira e a segunda linhas de A são permutadas.
$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	Um múltiplo da segunda linha de A é somado à primeira linha.

Propriedades dos Determinantes.

6. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

7. O determinante de uma matriz triangular (superior, inferior ou diagonal) é o produto das entradas da diagonal principal da matriz. Ou seja, $\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$

8. Uma matriz quadrada é inversível se, e só se, $\det A \neq 0$. E daí,

$$det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{det(A)}$$

3. DETERMINANTES POR REDUÇÃO POR LINHAS

Exemplo 5. Calcule o determinante abaixo até reduzir A a uma matriz triangular (forma escalonada).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP