Fundo Patrimonial FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 3 - Matrizes inversas e operações elementares

Objetivos dessa aula:

- obter a matriz inversa (caso exista), pela definição;
- aplicar operações elementares às linhas de uma matriz;
- obter a matriz inversa (caso exista), por operações elementares;
- conhecer matrizes ortogonais.

1. MATRIZES INVERSAS

Definição. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de **inversa** de A uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.

Exemplo 1. Em cada caso, vamos determinar, caso exista, a matriz inversa de A.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+5z & 2y+5t \\ x+3z & y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos, então, os sistemas

$$\begin{cases} 2x+5z=1 \\ x+3z=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2y+5t=0 \\ y+3t=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x=3, y=-5, z=-1, t=2.$$

Logo, a matriz A é inversível e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x+3z & 6y+3t \\ 8x+4z & 8y+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos, então, os sistemas

$$\begin{cases} 6x+3z=1 \\ 8x+4z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 6y+3t=0 \\ 8y+4t=1 \end{cases}$$

Ao resolver esses sistemas, porém, vemos que não admitem solução (tente resolvê-los, por qualquer método!). Concluímos, então, que a matriz A não é inversível.

2. OPERAÇÕES ELEMENTARES

Dada uma matriz A, chamam-se **operações elementares** as seguintes ações:

1. Permutar duas linhas de A.

Indicamos a troca das linhas L_i e L_j por $L_i \leftrightarrow L_j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar uma linha de A por um número real não nulo.

Indicamos que multiplicamos a linha L_i de A pelo número real λ escrevendo $L_i \rightarrow \lambda L_i$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Somamos a uma linha de A uma outra linha, multiplicada por um número real.

Indicamos que somamos à linha L_i a linha L_j multiplicada pelo número real λ por: $L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 + 2.L_1$$

3. PROCEDIMENTO PARA INVERSÃO DE MATRIZES

Teorema. Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade, por uma sequência de operações elementares com linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes A e I, através de operações elementares até chegarmos à matriz I na posição correspondente à matriz A. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz I será a inversa de A.

$$[A \ \vdots \ I] \longrightarrow [I \ \vdots \ A^{-1}]$$

Vejamos como este procedimento pode ser colocado em prática:

Exemplo 2. Calcule a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \to \frac{1}{6}L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 \to (-11)L_1 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{6} & 1 \end{array}\right] L_2 \to 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 3 \end{array}\right] \quad L_1 \to \left(-\frac{1}{3}\right)L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 3 \end{array}\right] \qquad \therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. Calcule a matriz inversa da seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: Analisando a 1ª Coluna:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\;\vdots\;\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\;\vdots\;\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_2 \to (-2)L_1 + L_2 \\ L_4 \to L_1 + L_4 \end{array}$$

Analisando a 2ª coluna:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\;\vdots\;\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \to (-1)L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\;\vdots\;\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \to (-1)L_3$$

Analisando a 3ª coluna:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to (-2)L_3 + L_2 \\ L_4 \to L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to 2L_4 + L_1 \\ L_2 \to (-4)L_4 + L_2 \\ L_3 \to 3L_4 + L_3 \end{array}$$

Analisando a 4ª coluna:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da inversão de matrizes.

1. Se $A \in M_n(R)$ e inversível, então $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Se $A,B \in M_n(R)$ são inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Se $A \in M_n(R)$ é inversível, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Definição. Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n, que seja inversível, é **ortogonal**, quando $A^{-1} = A^t$.

Exemplo 4. A matriz $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ é ortogonal.

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP