Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 2 - Operações com Matrizes

Objetivos dessa aula:

Aprender algumas das operações básicas de matrizes: transposição, adição, multiplicação por um escalar, produto e potência de matrizes.

1. ADIÇÃO

A **soma de duas matrizes** de mesma ordem $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $B_{m \times n} = (b_{ij})$ é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo 1. Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+(-1) & 3+1 \\ 4+(-4) & 5+0 & 6+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ \frac{3}{4} + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ \frac{3+12}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ \frac{15}{4} \end{bmatrix}$

Propriedades: Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

I. $A + B = B + A$ (comutativa)

II. $A + B + C = A + B + C$ (associatividade)

III. $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

2. MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Seja $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e k um número, então definimos uma nova matriz:

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo 2. Calcule:

a) $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.7 & 3.2 \\ 3.5 & 3.(-1) & 3.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

b) $-2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Propriedades: Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e números k, $k1$ e $k2$, temos:

I. $k \cdot (A + B) = kA + kB$ (distributiva)

II. $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1A + k_2A$ (distributiva)

III. $0 \cdot A = 0$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz A, teremos a matriz nula.

IV. $k_1 \cdot (k_2A) = (k_1k_2)\mathrm{A}$

3. TRANSPOSIÇÃO

Vimos da definição de **matriz transposta** que dada uma matriz $A_{m\times n} = (a_{ij})$, podemos obter uma outra matriz $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ij}$.

Por exemplo:

$$A_{3\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t{}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, temos:

I. $(A^t)^t = A$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

II. $(A+B)^t = A^t + B^t$, em outras palavras, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.

III. $(kA)^t = kA^t$, onde *k* é qualquer escalar.

Exemplo 3. Calcule as matrizes $2A, \frac{1}{3}B$ e $\frac{1}{2}(A+B)$, sendo dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução: $2A = 2.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}.(A+B) = \frac{1}{2}.\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 7/2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz X em cada uma das equações:

a) $2X + A = 3B + C \Rightarrow 2X = 3B + C - A \Rightarrow X = \frac{1}{2}.(3B + C - A)$

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b) $X + A = \frac{1}{2}(B - C) \Rightarrow X = \frac{1}{2}.(B - C) - A \Rightarrow X = \frac{1}{2}.\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$X = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

4. MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. Definimos $AB = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que

$$C = [c_{ik}]_{m\times p} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nk}$$

para todo $i \in 1,2,\ \dots\ , m$ e todo $k \in 1,2,\ \dots\ , p$.

Observações:

1. Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Além disso, a matriz resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.

2. O elemento c_{ik} é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da k-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Exemplo 5. Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2.(-1)+1.4 \\ 4.1+2.0 & 4.(-1)+2.4 \\ 5.1+3.0 & 5.(-1)+3.4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \textit{não é possível.}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1.0+0.3 & 1.6+0.8 & 1.1+0.(-2) \\ (-2).0+3.3 & (-2).6+3.8 & (-2).1+3.(-2) \\ 5.0+4.3 & 5.6+4.8 & 5.1+4.(-2) \\ 0.0+1.3 & 0.6+1.8 & 0.1+1.(-2) \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

Propriedades:

i) Em geral $AB \neq BA$ (podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não).

Exemplo 6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Solução: $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

- Note, ainda, que $AB = 0$, sem que $A = 0$ ou $B = 0$.

- Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

ii) $A \cdot I = I \cdot A = A$ (isto justifica o nome da matriz identidade).

iii) $A \cdot (B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma).

iv) $(A + B) \cdot C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma).

v) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associatividade)

vi) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ **(observe a ordem!)**

vii) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$

Exemplo 7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A.C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$

c) $B.C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $C.D = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

e) $D.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

f) $D.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $-A = (-1).A = (-1). \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $-D = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$

5. POTÊNCIA DE MATRIZES

Definimos a **potência de expoente** n (ou a n-ésima potência) de uma matriz quadrada A como sendo o produto $A \times A \times \ldots \times A$, onde há n fatores iguais a A. Denotamos:

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

Exemplo 8. Dada $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ 18 & -11 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ 18 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -76 \\ 57 & -83 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9. Ache x, y, z e w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \quad (I) \\ 3x + 4y = 0 \Rightarrow 3x = -4y \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y \quad (II) \\ 2z + 3w = 0 \Rightarrow 2z = -3w \Rightarrow z = -\frac{3}{2}w \quad (III) \\ 3z + 4w = 1 \quad (IV) \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $2.\left(-\frac{4}{3}y\right) + 3y = 1 \Rightarrow -\frac{8}{3}y + 3y = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}y = 1 \Rightarrow y = 3$

De (II): $x = -\frac{4}{3}.3 = -4$

Substituindo (III) em (IV), obtemos: $3.\left(-\frac{3}{2}w\right) + 4w = 1 \Rightarrow -\frac{9}{2}w + 4w = 1 \Rightarrow \frac{-1}{2}w = 1 \Rightarrow -w = 2 \Rightarrow w = -2$

De (III): $z = -\frac{3}{2}.(-2) = 3$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP