Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 1 - Matrizes

Objetivos dessa aula:

- reconhecer matrizes e identificar matrizes especiais;
- estabelecer a igualdade entre matrizes.

1. MATRIZES

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos sobre matrizes. Estes conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais, não apenas porque eles "ordenam e simplificam" o problema, mas também porque oferecem novos métodos de resolução.

Definição informal. Uma **matriz** é um agrupamento retangular de *elementos* dispostos em *linhas* e *colunas*.

Exemplo 1. A tabela abaixo mostra os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas.

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Podemos representar esta tabela por uma matriz:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

- Representamos uma matriz de *m* linhas e *n* colunas por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}, i = 1,2,3,\ldots,m \quad e \quad j = 1,2,3,\ldots,n.$$

- Escrevemos os elementos de uma matriz delimitados por parênteses, colchetes ou barras duplas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está.

Por exemplo:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4/5 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3/7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$

e) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

Definição. Duas **matrizes** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{r\times s}$ são **iguais**, $A=B$, se elas têm o mesmo número de linhas $(m=r)$ e colunas $(n=s)$ e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij}=b_{ij})$.

Exemplo 2.

a) $\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ t=0 \\ z=1 \end{cases}$

2. MATRIZES ESPECIAIS

Consideremos uma matriz com *m* linhas e *n* colunas que denotaremos por $A_{m\times n}$.

a) **Matriz quadrada:** é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas $m = n$.

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A_3$$

$$B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = B_2$$

$$C_{1\times 1} = [2] = C_1$$

Definição. Chama-se **diagonal principal** de uma matriz quadrada de ordem m, o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, isto é: $\{a_{ij} \mid i=j\} = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}\}$

Chama-se **diagonal secundária** de uma matriz quadrada de ordem m, o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a $m + 1$.

diagonal principal

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

b) **Matriz nula:** é aquela em que $a_{ij} = 0$ para todo i e j. Por exemplo:

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{3\times5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) **Matriz coluna:** é aquela que possui uma única coluna $n = 1$. Por exemplo:

$$A_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{2\times1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d) **Matriz linha:** a é aquela que possui uma única linha $m = 1$. Por exemplo:

$$A_{1\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{1\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) **Matriz diagonal:** é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero. Por exemplo:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

f) **Matriz identidade:** é toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Por exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

g) **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Por exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

h) **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Por exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

i) **Matriz transposta** de A, representada por A^t ou A' é uma matriz da forma $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t{}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t{}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t{}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

j) **Matriz simétrica:** é uma matriz quadrada igual à sua transposta, isto é, $A^t = A$.

Por exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t{}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = A^t$$

$$B_{2\times2} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t{}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = B^t$$

Exemplo 3. Explicite os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

Solução: $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

onde:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$
$a_{12} = 1 - 2 = -1$
$a_{13} = 1 - 3 = -2$

$a_{21} = 2 - 1 = 1$
$a_{22} = 2 - 2 = 0$
$a_{23} = 2 - 3 = -1$

$a_{31} = 3 - 1 = 2$
$a_{32} = 3 - 2 = 1$
$a_{33} = 3 - 3 = 0$

Exemplo 4. Construa as seguintes matrizes e classifique-as:

a) $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, matriz identidade, quadrada.

b) $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i + j = 4 \\ 0, se\ i + j \neq 4 \end{cases}$

$$B_3 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, matriz simétrica, quadrada.

Exemplo 5. Determine x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$.

Solução: $\begin{cases} 2x = x+1 \Rightarrow 2x - x = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 3y = 2y \\ y + 4 = 4 \Rightarrow y = 4 - 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP