Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - PMR

Aula 8 – Observadores

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

FILTRO DE KALMAN (DISCRETO)

MODELO DO SISTEMA

$$x_K = A x_{K-1} + B u_{K-1} + w_{K-1}$$

$\dot{x} = Ax + Bu$ (CONTÍNUO)

$$\frac{x_K - x_{K-1}}{\Delta t} = A x_{K-1} + B u_{K-1}$$

$$x_K = \underbrace{(A\Delta t + I)}_{A_{DISC}} x_{K-1} + \underbrace{B \Delta t}_{B_{DISC}} u_{K-1}$$

x_K = ESTADO $(n \times 1)$

A = MATRIZ SISTEMA $(n \times n)$

B = MATRIZ ENTRADA-ESTADO $(n \times 1)$

u = ENTRADA (1×1)

w = RUÍDO DO PROCESSO OU INCERTEZA DO MODELO ASSUMIDO GAUSSIANO $(\underset{\text{MÉDIA}}{0} ; \underset{\text{COVARIÂNCIA}}{Q})$

$$P(w) \sim N(0; Q)$$

MODELO DA MEDIDA

$$z_k = H \cdot x_k + v_k$$

z_k = MEDIDAS $(m \times 1)$

H = ESTADO-SAIDA $(m \times n)$

v_k = RUIDO DOS SENSORES

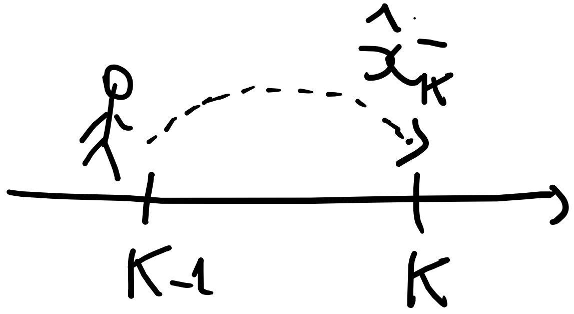
$$P(v) = N(0; R)$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

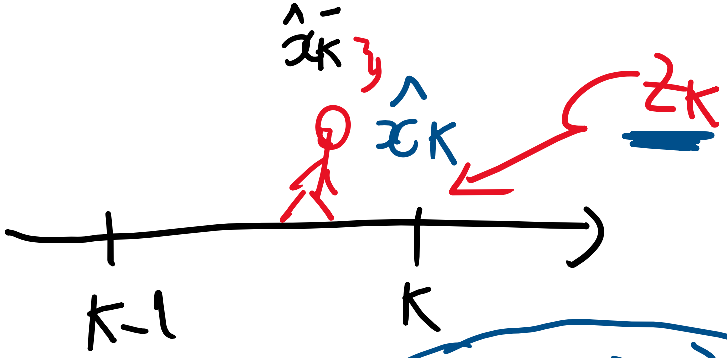
↳ 1 SENSOR POSIÇÃO

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ⇒ 2 SENSORES POSIÇÃO

$\hat{x}_k^-$ = ESTIMATIVA A PRIORI DOS ESTADOS NO INSTANTE K



$\hat{x}_k$ = ESTIMAÇÃO A POSTERIORI, APÓS RECEBER AS MEDIDAS DOS SENSORES z_k



x_k ????

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \Rightarrow P_k^- = E\left[e_k^- \cdot e_k^{-T}\right]$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \Rightarrow P_k = E\left[e_k \cdot e_k^{T}\right]$$

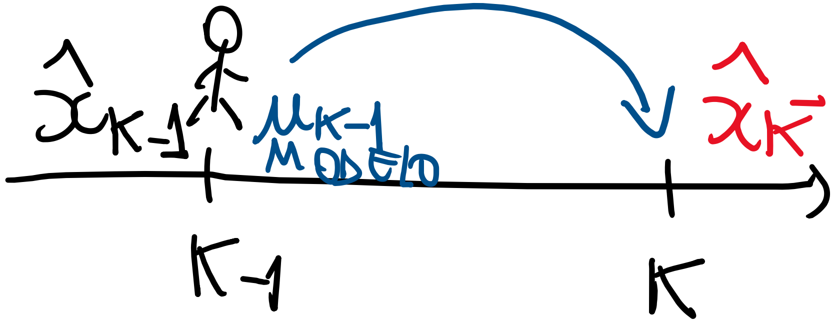
estado real

estado estimado a posteriori

2 PASSOS

1) PREDIÇÃO

$$\boxed{\hat{x}_k^- = A.\hat{x}_{k-1} + B.u_{k-1}}$$

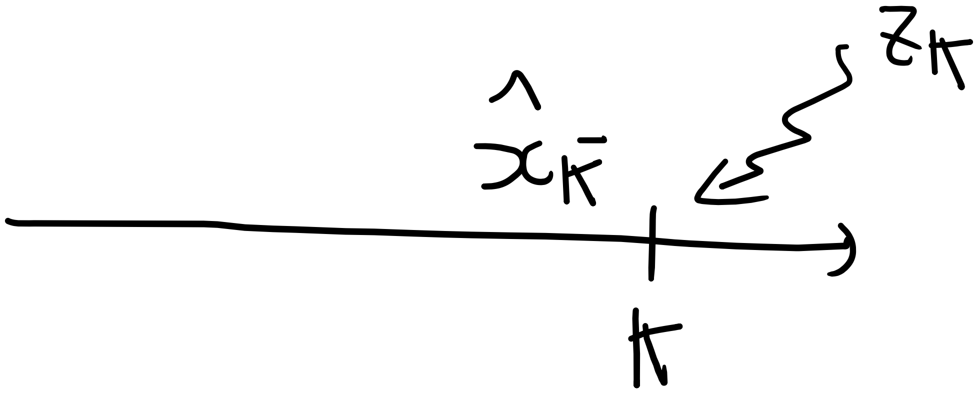


$$P_k^- = A P_{k-1} . A^T + Q$$

2) CORREÇÃO

$$\boxed{\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k.(z_k - H.\hat{x}_k^-)}$$

INOVAÇÃO



$$P_k = (I - K_k H) P_k^-$$

$K_k = P_k . H^T . (H^T . P_k^- H^T + R)^{-1} \rightarrow$ OBTIDO P/ MINIMIZAR P_k

PARÂMETROS

R = RUIDO DE MEDIDA =

$$\begin{pmatrix} \overset{\text{RUIDO1}}{\square} & & & & & \\ & \overset{\text{RUIDO2}}{\square} & & & \emptyset & \\ & & \square & & & \\ & \emptyset & & \square & & \\ & & & & \square & \end{pmatrix}$$

Q = RUIDO DE PROCESSO → PODE SER OBTIDA COM TECNICA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS OU AJUSTE POR SINTONIA

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & & \emptyset \\ & Q_{22} & \\ \emptyset & & \ddots \end{pmatrix}$$

CASOS LIMITES

1) R GRANDE

↳ SENSOR COM MUITO RUIDO

$$K_K \to 0 \longrightarrow \text{NENHUM USO DO SENSOR}$$

$$\boxed{\hat{x}_K = \hat{x}_K^-}$$

↳ SÓ USA O MODELO

2) SENSOR MUITO BOM E H QUADRADO E NÃO SING

$R \to 0$ ou $Q \to \infty$

$$K_K = P_K^- H^T \cdot H^{-T} P_K^{-1} H^{-1}$$

I

I

$$\boxed{K_K = H^{-1}}$$

$$\hat{x}_K = \cancel{\hat{x}_K^-} + H^{-1} \cdot z_K - H^{-1} \cancel{H} \cdot \hat{x}_K^-$$

NÃO USA O MODELO

$$\boxed{\hat{x}_K = H^{-1} \cdot z_K}$$

↳ SÓ USA O SENSOR

1) PREDIÇÃO

$$\boxed{\hat{x}_K^- = A \cdot \hat{x}_{K-1} + B \cdot u_{K-1}}$$

$$P_K^- = A P_{K-1} \cdot A^T + Q$$

2) CORREÇÃO

$$\boxed{\hat{x}_K = \hat{x}_K^- + K_K \cdot \underbrace{(z_K - H \cdot \hat{x}_K^-)}_{\text{INOVAÇÃO}}}$$

0

$$P_K = (I - K_K H) P_K^-$$

$$K_K = P_K^- \cdot H^T \cdot (H^T \cdot P_K^- H^T + \cancel{R})^{-1} \to 0$$

0

EXTENDED KALMAN FILTER

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \\ z_k = h(x_k, v_k) \end{cases}$$

- w e v = RUÍDOS

- APROX. DOS ESTADOS SEM RUÍDO

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}; u_{k-1}; 0)$$

$$\tilde{z}_k = h(\hat{x}_k; 0)$$

MODELO LINEARIZADO

$$x_k = \tilde{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W \cdot w_{k-1}$$

$$z_k = \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + V \cdot v_k$$

x_k, z_k = ESTADOS E MEDIDAS REAIS

$\tilde{x}_k, \tilde{z}_k$ = APROXIMAÇÃO SUPONDO RUÍDO NULO

$\hat{x}_k$ = APROXIMAÇÃO A POSTERIORI

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0}$$

$$W_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right|_{\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0}$$

$$V_{ij} = \left.\frac{\partial h_i}{\partial v_j}\right|_{\tilde{x}_k, 0} \qquad H_{ij} = \left.\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right|_{\tilde{x}_k, 0}$$

PREDIÇÃO

$$\begin{cases} \hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \\ P_k = A_k \cdot P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} \cdot W_k^T \end{cases}$$

CORREÇÃO

$$\begin{cases} \hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^- ; 0)) \\ K_k = P_k^- H_k^T \cdot (H_k P_k^- H_k + V_k R_k V_k^T)^{-1} \\ P_k = (I - K_k H_H) P_k^- \end{cases}$$