Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - PMR

Aula 6 – Sliding Mode Control

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

ROBUSTO + NÃO LINEAR

FEEDBACK LINEARIZATION
+ TERMOS QUE LIDAM
COM IMPRECISÕES

SUPERFÍCIE DE ESCORREGAMENTO
(SLIDING SURFACE)

$$x^{(n)} = f(\underset{\sim}{x}) + b(\underset{\sim}{x})\,u \quad (\text{SISO})$$

x É A POSIÇÃO

ENTRADA DE CONTROLE

$f(\underset{\sim}{x})$ = NÃO É CONHECIDO EXATAMENTE

$b(\underset{\sim}{x})$ = " " " "

(CONHEÇO O SINAL)

SEJA $\underset{\sim}{\tilde{x}} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x_d}$

ERRO

VETOR

$$\underset{\sim}{x_d} = (x_d, \dot{x}_d, \dots x_d^{n-1})^T$$

DESEJADO OU REFERÊNCIA OU SETPOINT

OBJETIVO $\underset{\sim}{\tilde{x}} \to \underset{\sim}{0}$

A SUPERFÍCIE S EM $\mathbb{R}^{(n)}$ DEFINIDA POR $s(\underset{\sim}{x}, t) = 0$ COM:

$$s(\underset{\sim}{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x} \quad (\lambda > 0)$$

A SUPERFÍCIE S EM $\mathbb{R}^{(n)}$ DEFINIDA POR $s(\tilde{x},t)=0$ COM:

CONSTANTE

$$s(\tilde{x},t)=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n-1}\tilde{x} \qquad (\lambda>0)$$

$$\text{P/ } n=2 \Rightarrow s=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{1}\tilde{x}=\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x} \; *$$

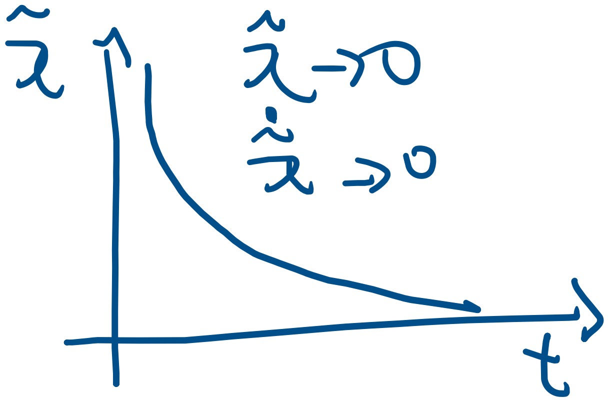
$$\text{P/ } n=3 \Rightarrow s=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{2}\tilde{x}=\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\lambda\frac{d}{dt}+\lambda^2\right)\tilde{x}$$

$$s=\ddot{\tilde{x}}+2\lambda\dot{\tilde{x}}+\lambda^2\tilde{x}$$

OU SEJA, O PROBLEMA DE MANTER $\tilde{x}=0$ É EQUIVALENTE A MANTER A TRAJ. EM S POIS $s(\tilde{x},t)=0$ É UMA EQ. DIFERENCIAL CUJA SOLUÇÃO É $\tilde{x}=0$

$$\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}=0$$

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}=-\lambda\tilde{x}}$$



O PROBLEMA ORIGINAL DE $\underset{\sim}{x} \to 0$ EQUIVALE A MANTER O VALOR ESCALAR s EM $\emptyset$.

O PROBLEMA QUE ERA N-DIMENSIONAL DE MANTER $\underset{\sim}{x} \to 0$ FOI REDUZIDO AO PROBLEMA DE 1º ORDEM EM $\underline{s}$.

DE FATO, DERIVANDO $\underline{s}$ UMA VEZ, APARECE O $\underline{\underline{u}}$, O CONTROLE SERÁ PROJETADO.

Ex) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{1}{m}(-c\dot{x} - kx)}_{f(\underset{\sim}{x})} + \underbrace{\frac{1}{m}}_{b(\underset{\sim}{x})}\underbrace{F(t)}_{u}$$

$\to s(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, t) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$

$\underset{\sim}{x} = (\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$

$\to \dot{s} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda\dot{\tilde{x}} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d)$

$$\boxed{\dot{s} = \frac{1}{m}(-c\dot{x} - kx) - \ddot{x}_d + \frac{1}{m}\underline{F(t)} + \lambda\dot{\tilde{x}}}$$

DINÂMICA DA VARIÁVEL $\underline{\underline{s}}$

$$\boxed{\dot{s} = \frac{1}{m}(-c\dot{x} - kx) - \ddot{x}_d + \frac{1}{m}F(t) + \lambda \dot{\tilde{x}}}$$

DINÂMICA DA VARIÁVEL $\underline{\underline{s}}$

↳ PROPOSTA

CONSTANTE

$$F(t) = c.\dot{x} + kx + (\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}})m - K.\text{SINAL}(s)$$

POIS EM MALHA FECHADA

$$\boxed{\dot{s} = -K\,\text{SINAL}(s)}$$

↳ EQ. DIF. EM $\underline{\underline{s}}$, QUE FAZ $s = 0$ NUM TEMPO FINITO.

E, POR CONSEQUÊNCIA, $\boxed{\tilde{x} \to 0}$

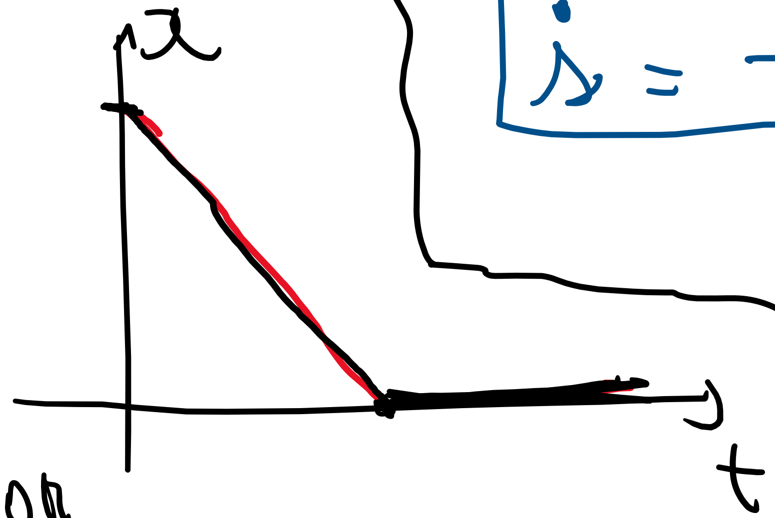
OBSERVAÇÃO:

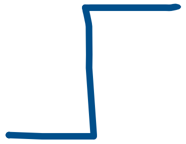
$$\dot{x} = u$$

$$u = -K\,\text{sinal}(x)$$

↓

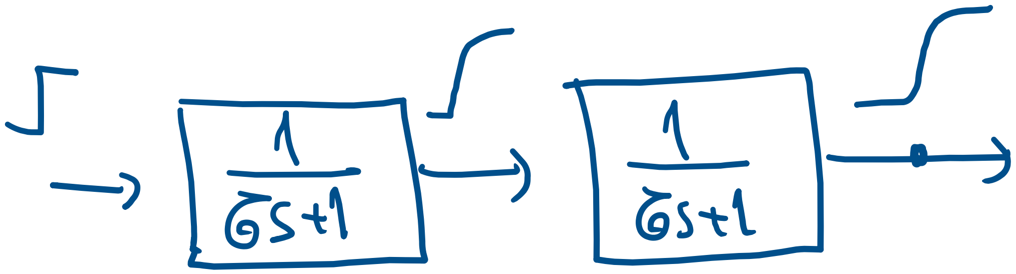
MELHOR CONTROLADOR "TEÓRICO" QUE ZERA O ERRO NUM TEMPO FINITO.





x_d é um degrau

→ Como obter $\dot{x}_d$ e $\ddot{x}_d$



τ deve ser pequeno em relação à dinâmica controlada

MAS QUAL A RELAÇÃO ENTRE O ERRO E $\underline{s}$ E EM $\tilde{x}$?

PODEMOS MOSTRAR QUE

$$\boxed{|s(\underline{x},t)| \le \phi \Rightarrow |\tilde{x}| \le \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}}$$

OU SEJA, UM ERRO EM $\underline{s}$ É DIRETAMENTE RELACIONADO A UM ERRO EM x.

$$s \rightarrow \boxed{\frac{1}{s+\lambda}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s+\lambda}} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{\frac{1}{s+\lambda}} \rightarrow \tilde{x}$$

$$s = \left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n-1} \cdot \tilde{x} = (s+\lambda)^{n-1}\tilde{x} \Rightarrow \boxed{\tilde{x} = \frac{1}{(s+\lambda)^{n-1}} \cdot \underline{s}}$$

se $s \to \phi \Rightarrow$ TVF

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x} = \lim_{s\to 0} s\tilde{X}(s)$$

$$s = \frac{\phi}{s} \Rightarrow \boxed{\tilde{x} \to \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}}$$

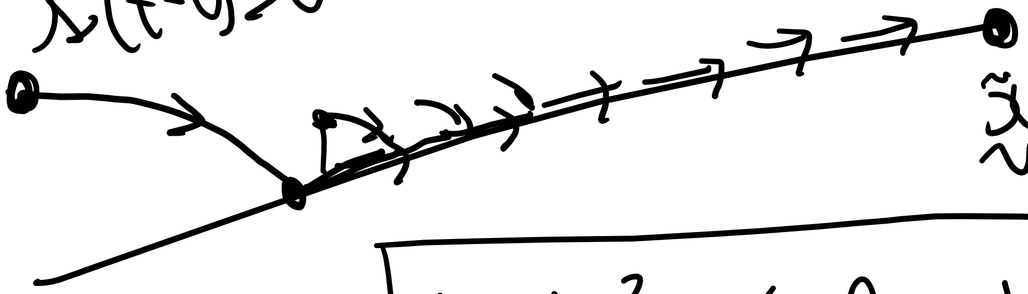
$$\Downarrow$$

LOGO O PROBLEMA ORIGINAL DE TRACKING ORDEM $\underline{n}$ É SUBSTITUÍDO POR UM PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE ORDEM 1

ALÉM DISSO, TEMOS QUE GARANTIR QUE AS TRAJETÓRIAS QUE SAÍREM DE $\underline{S}$, VOLTEM RAPIDAMENTE P/ $\underline{S}$

PARA ISSO, DEFINIMOS A CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO:

$s(t=0)>0$



$\tilde{x}=0$

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt} \le -\eta|s|}$$

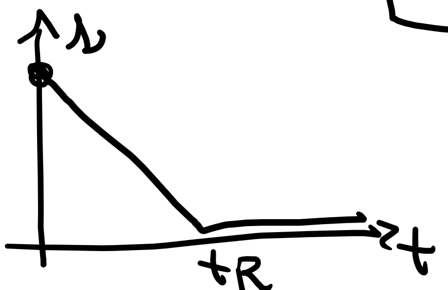
η → CONST. POSITIVA

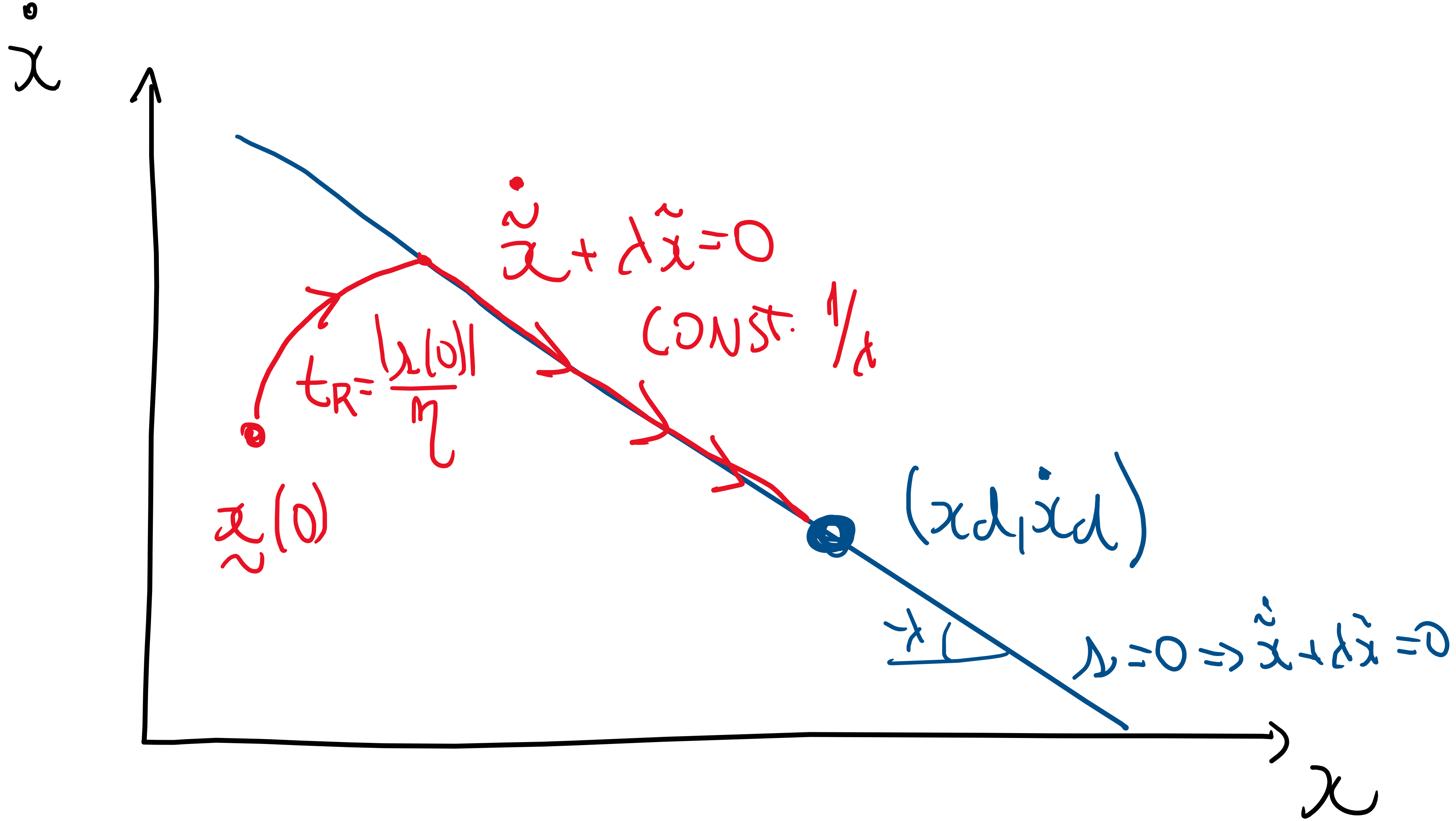
OU SEJA, AS TRAJETÓRIAS SEJAM ATRAÍDAS P/ S, E PERMANECENDO LÁ, $\tilde{x} \to 0$.

$t_{ALCANCE}$ → tempo p/ trajetória atingir $\underline{S}$

$s(t=0) \neq 0 > 0 \rightsquigarrow t_R$ É O TEMPO EM QUE $s(t_R)=0$

$$\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt} \le -\eta|s| \Rightarrow \boxed{t_R \le \frac{s(0)}{\eta}}$$




$\dot{x}$
x
$\dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0$
CONST. $1/\lambda$
$t_R = \frac{|s(0)|}{\eta}$
$\tilde{x}(0)$
$(x_d, \dot{x}_d)$
$-\lambda$
$s = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0$

Ex) $\ddot{x} = \underbrace{f(x,\dot{x})} + u$

- f NÃO É CONHECIDO
- ESTIMATIVA $\hat{f}$
- ERRO ESTIMATIVA $|f-\hat{f}| \leq F$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a(t)\,\dot{x}^2 \cos 3x + u \\ 1 \leq a(t) \leq 2 \end{cases}$$

$\hat{f} = -1{,}5\,\dot{x}^2 \cos 3x$

$F = 0{,}5\,\dot{x}^2 \cos 3x$

$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$

$\dot{s} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = f + u - \cancel{\ddot{x}_d} + \cancel{\lambda \dot{\tilde{x}}}$

$\rightarrow \hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}$ (u EQUIVALENTE)

$\rightarrow$ VAMOS INTRODUZIR UM TERMO DESCONTÍNUO EM s P/ GARANTIR A CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO

$$\boxed{u = \hat{u} - K \cdot \operatorname{sgn}(s)}$$

$\Rightarrow$ EM MALHA FECHADA

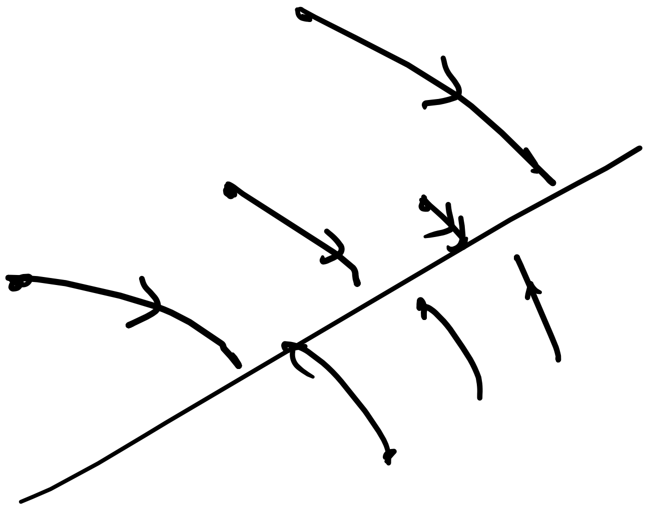
$$\boxed{\dot{s} = f - \hat{f} - K \operatorname{sgn}(s)}$$

PARA GARANTIR A COND. ESCORREGAMENTO

$$\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt} \leq -\eta|s|$$

$$s.\dot{s} = \overbrace{\left(f - \hat{f} - K\,\mathrm{sgn}(s)\right)}^{\dot{s}}s$$

$$\underbrace{(f-\hat{f})}_{<F}s - K|s| \leq -\eta.|s|$$

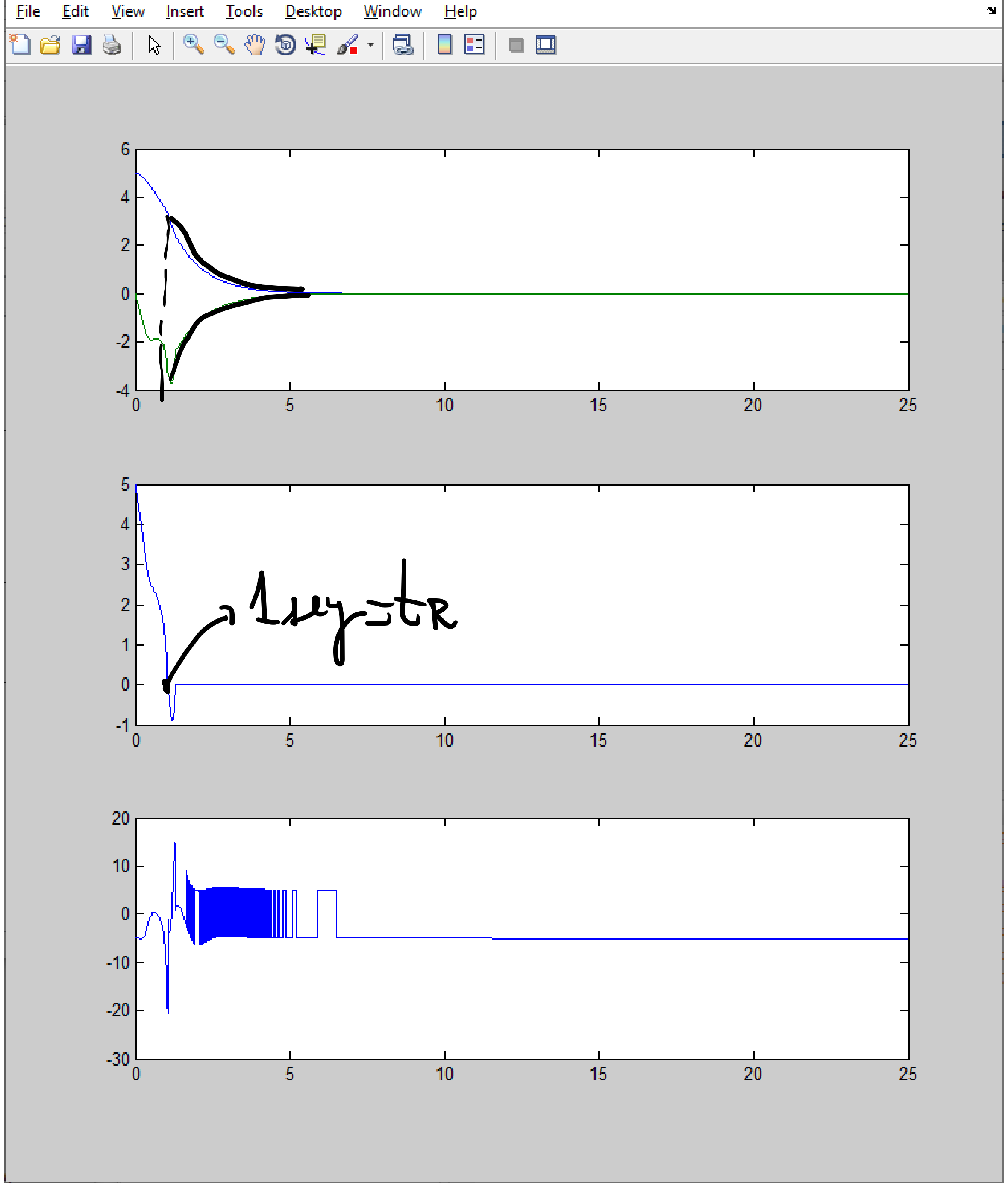


ooo

$$\mathrm{sgn}(s)\,s = |s|$$

$$K.|s| \geq \eta.|s| + F.s \Rightarrow \text{se } \boxed{K \geq \eta + F}$$ SERÁ SATISFEITA SEMPRE

TERMO DESCONTÍNUO $K\,\mathrm{sgn}(s)$ DEPENDE DO ERRO DE MODELAGEM (F) E DO TEMPO DE ALCANCE REQUERIDO (η)

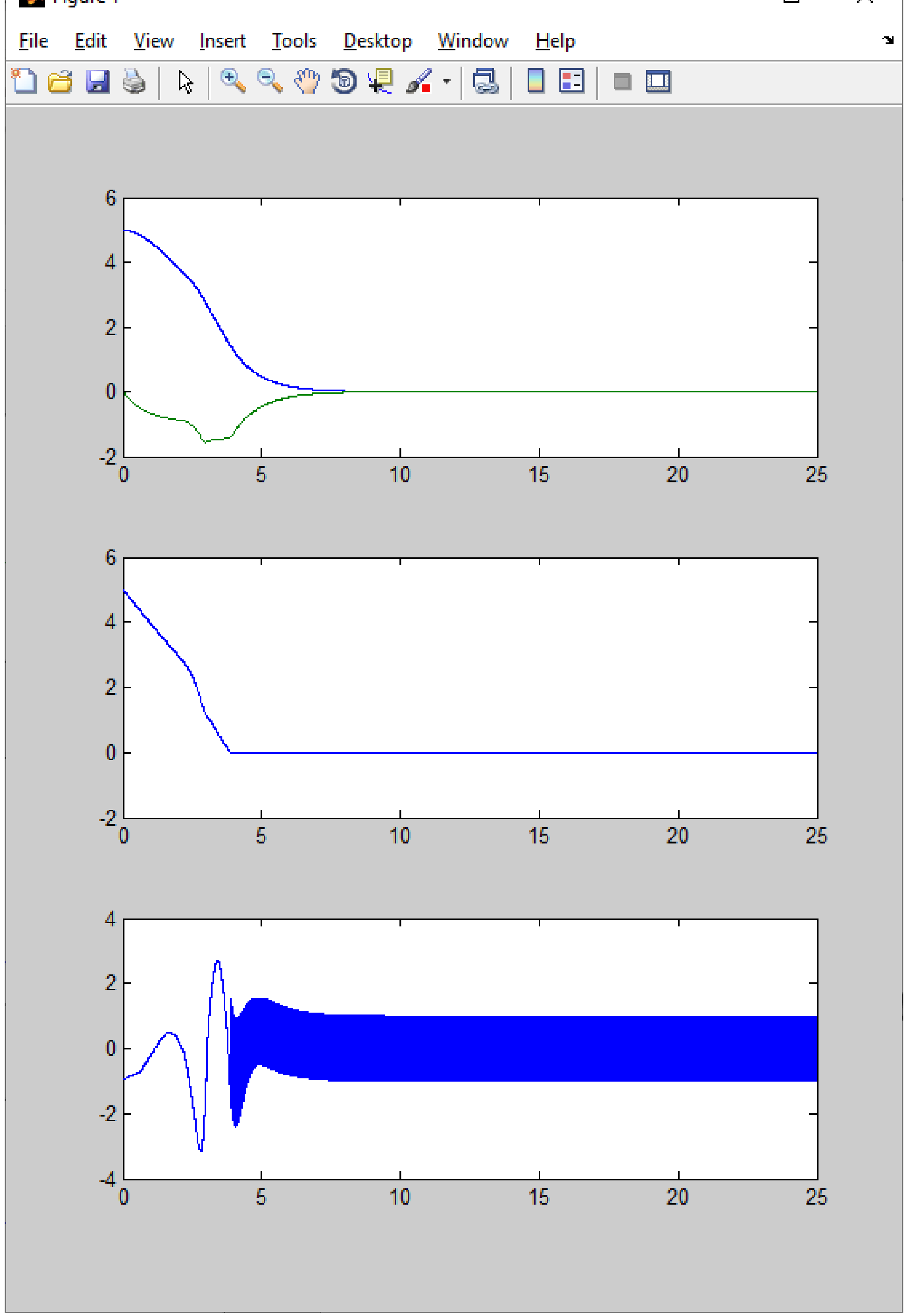


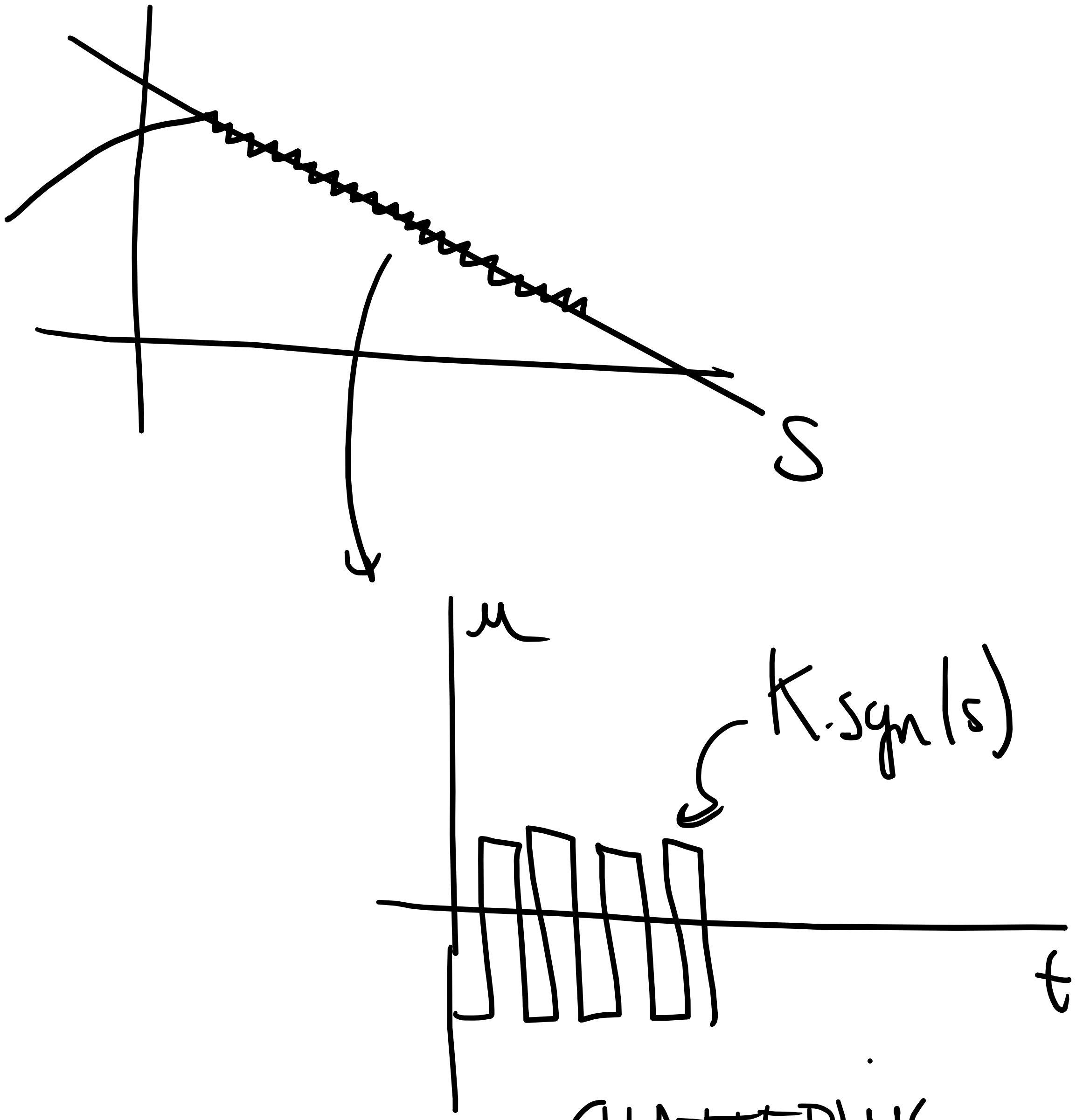
$$\lambda = 1$$

$$\eta = 5$$

$$t_R = \frac{s(0)}{\eta} = \frac{5}{5} = 1\,s$$

$$s(0) = \dot{\tilde{x}}(0) + \lambda \tilde{x}(0) = 5$$


File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
6
4
2
0
-2
0 5 10 15 20 25
4
2
0
-2
-4

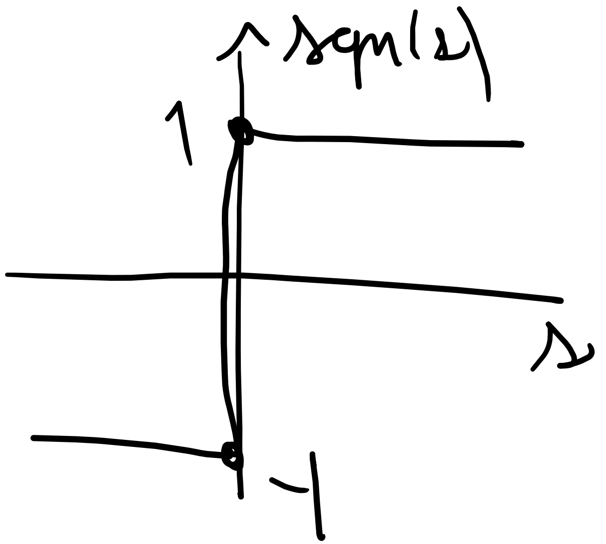

S
u
K.sgn(s)
t

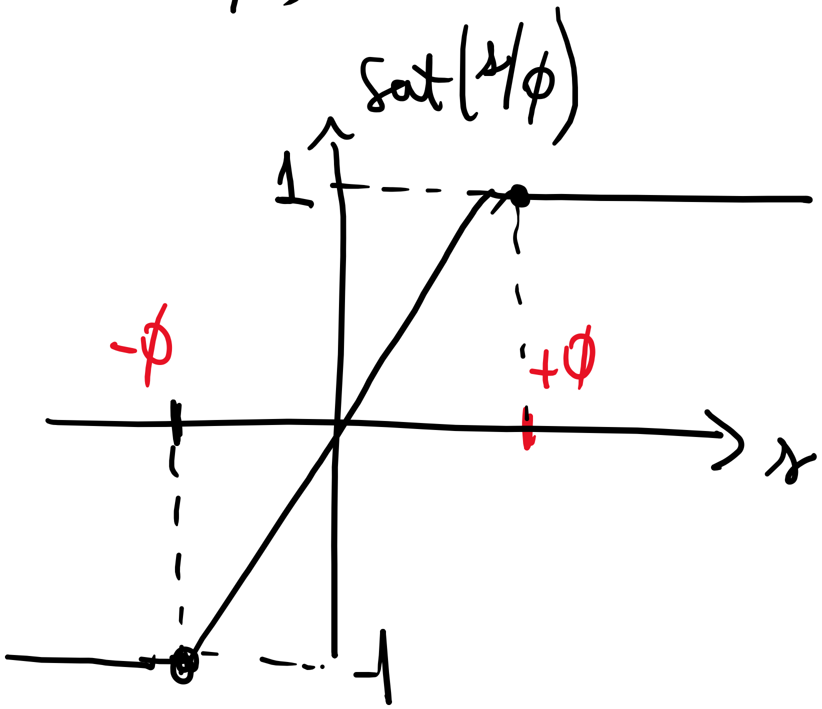
CHATTERING

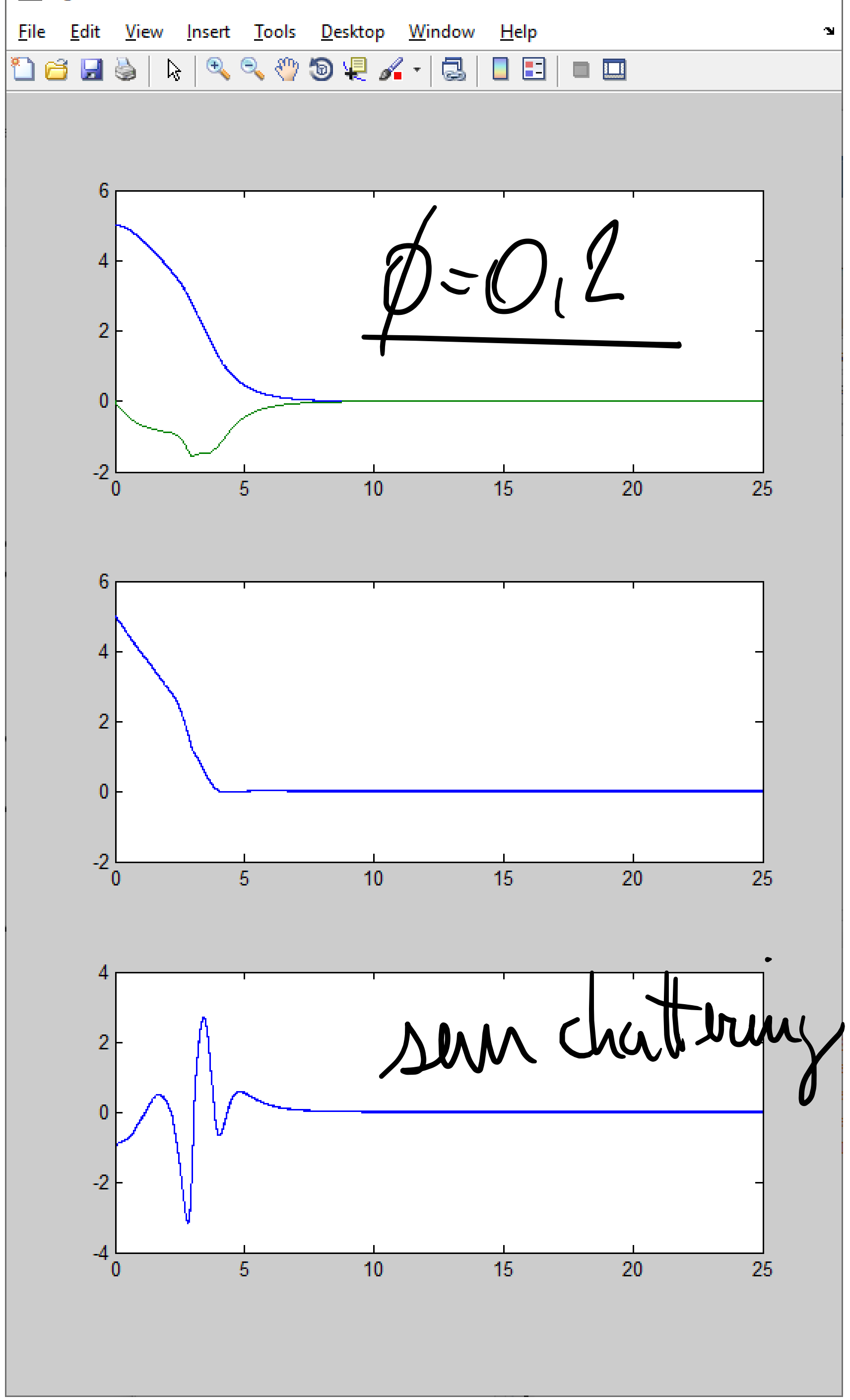
SOLUÇÃO →

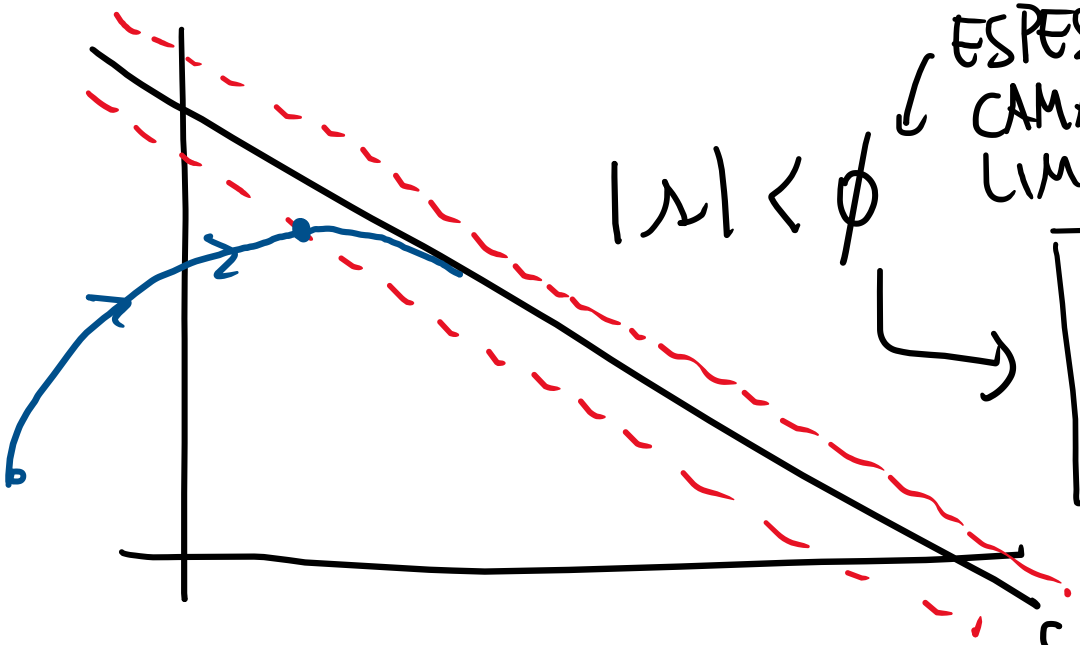
TROCAR

$sgn(s) \rightarrow sat(s/\phi)$









$S: s=0$

$|s| < \phi$

ESPESSURA CAMADA LIMITE

$$\boxed{|\tilde{x}| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}}$$

A CAMADA LIMITE INTRODUZ UM ERRO DE POSICIONAMENTO, MAS ELIMINA CHATTERING

CONTROLE INTEGRAL

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \cdot \int \tilde{x} \, d\tau$$

POR EX, P/ $n=2$

$$s = \dot{\tilde{x}} + 2\lambda \tilde{x} + \lambda^2 \int \tilde{x} \, d\tau$$

- ELIMINA ERRO EM REGIME
- SE ASSOCIADO $sat(s/\phi)$, ELIMINA CHATTERING

AJUSTE PARÂMETROS

λ, η, ϕ

λ → LARGURA DE BANDA RESPOSTA MALHA FECHADA APÓS ATINGIR CAMADA LIMITE

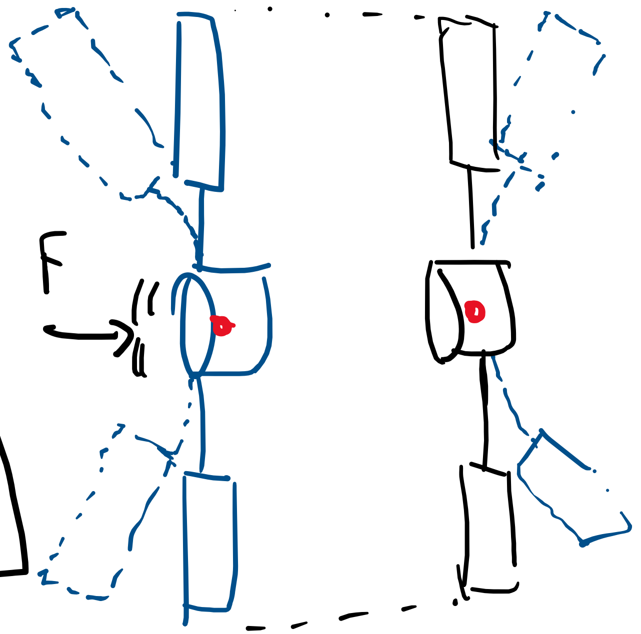
$n=2 \rightarrow \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0$ → λ REGULA O TEMPO RESPOSTA DO ERRO

$$* \quad \lambda < \lambda_R = \frac{2\pi \nu_R}{3} \leftarrow Hz$$

→ ν_R 1º MODO VIBRAR NÃO MODELADO

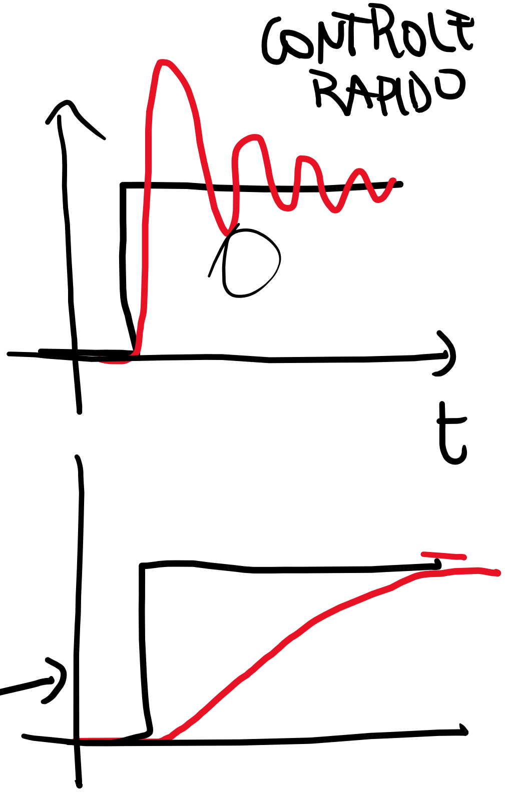
3 REGRAS)

1) λ DEVE SER MENOR QUE O 1º MODO RESSONANTE NÃO MODELADO

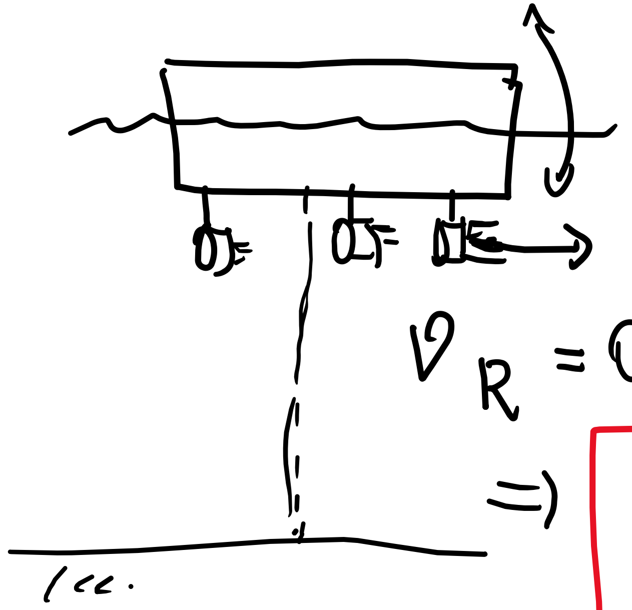


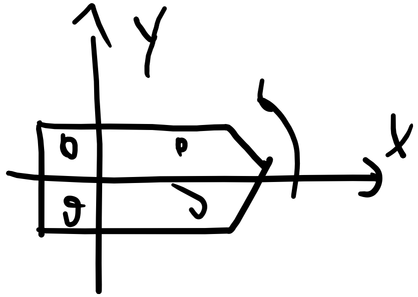
$m\ddot{x} = F$

TRANS. CORPO RÍGIDO



Ex)



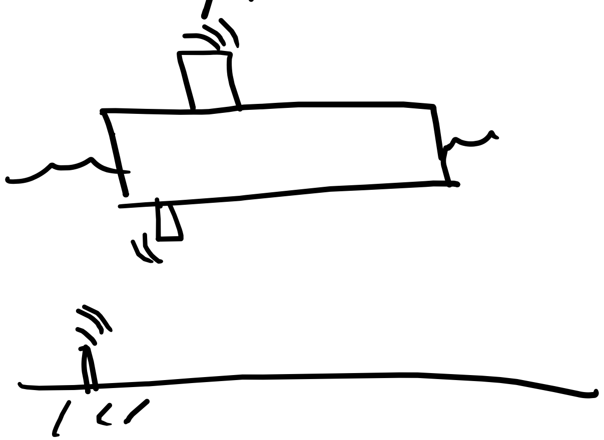


$v_R = 0{,}5 \text{ rad/s}$

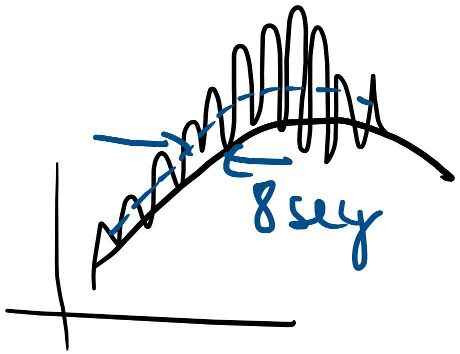
$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}16 \text{ rad/s}}$

REGRA 2) ATRASO TRANPORTE / MEDIDAS

$\lambda < \lambda_A = \frac{1}{3T_A}$



~ 8 seg atraso ENTRE POSIÇÃO REAL E FILTRADA



$\boxed{\lambda < \frac{1}{24} = 0{,}042 \text{ rad/s}}$

REGRA 3) AMOSTRAGEM

$$\lambda < \lambda_S = \frac{1}{5} \vartheta_{SAMPLE}$$

EXEMPLO) NAVIOS DP = 1 seg

$$\boxed{\lambda < \frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2\,rad/s}$$

⇒ P/ PLATAFORMA DP ⇒

$$\boxed{\lambda = 0{,}042\,rad/s}$$

2) η → tempo ALCANCE

$$t_R = \frac{s(0)}{\eta} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{s(0)}{t_R}}$$

3) ϕ → ESPESSURA CAMADA LIMITE

$$\tilde{x} = \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}$$

~~~

REGIME TOLERÁVEL
~~~