Aula 3 – Análise de Sistemas Não Lineares

Estabilidade Lyapunov

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

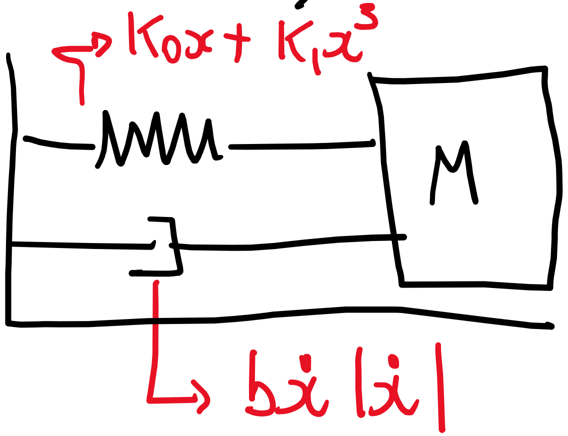
Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

2º MÉTODO LYAPUNOV DIRETO

BASEADO EM ENERGIA

- SE A ENERGIA TOTAL DE UM SISTEMA ESTIVER SENDO DISSIPADA ⇒ ESTÁVEL

$K_0, K_1, b > 0$



$M\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + K_0x + K_1x^3 = 0$

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{E\ \text{CINÉTICA}} + \underbrace{\int_0^x (K_0x + K_1x^3)\,dx}_{E\ \text{POT ELÁSTICA}}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K_0x^2 + \frac{1}{4}K_1x^4 \rightarrow \text{ENERGIA MECÂNICA}$$

$$\dot{V}(x) = M\dot{x}.\ddot{x} + K_0x.\dot{x} + K_1x^3.\dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}\left(-b\dot{x}|\dot{x}| \cancel{-K_0x} \cancel{-K_1x^3}\right) + \cancel{K_0x\dot{x}} + \cancel{K_1x^3\dot{x}}$$

$$\boxed{\dot{V}(x) = -b\dot{x}^2|\dot{x}| = -b|\dot{x}|^3}$$

OU SEJA, $\dot{V}(x) < 0$ SEMPRE ATÉ QUE $\dot{x} = 0$ (SISTEMA PARE)

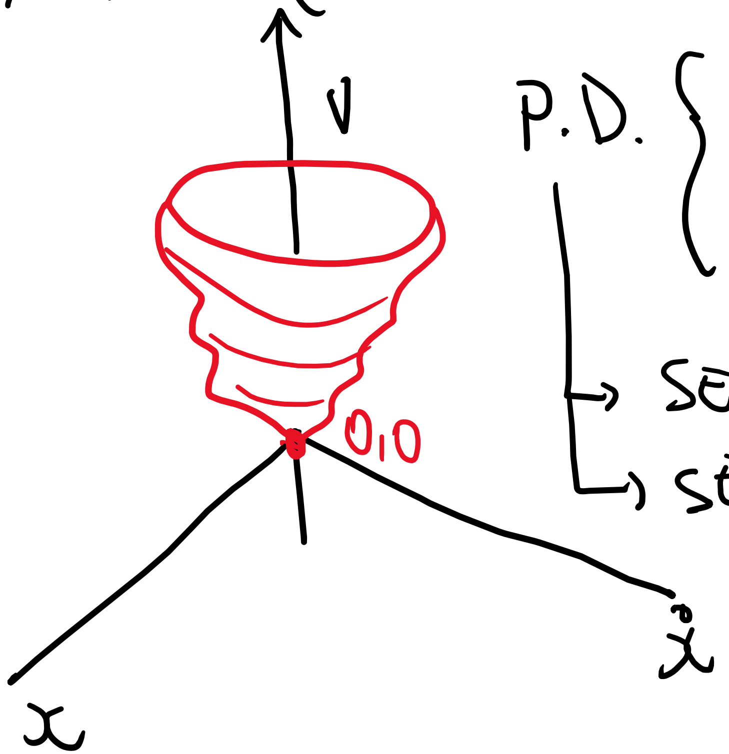
→ EMEC IRÁ DIMINUIR DEVIDO AO AMORT. ATÉ QUE $x = \dot{x} = 0$ MOLA REL

PROBLEMA → COMO DEFINIR F. LYAPUNOV

2 PROPRIEDADES

$\boxed{(x,\dot{x}) = (0,0) \text{ É PONTO DE EQUILÍBRIO}}$

1) $V(x,\dot{x}) > 0$ SEMPRE QUE $x,\dot{x} \neq 0$ (F. POSITIVA DEFINIDA)



P.D. $\begin{cases} \underset{\sim}{x} \neq 0 \Rightarrow V(\underset{\sim}{x}) > 0 \\ \underset{\sim}{x} = 0 \Rightarrow V(\underset{\sim}{x}) = 0 \end{cases}$

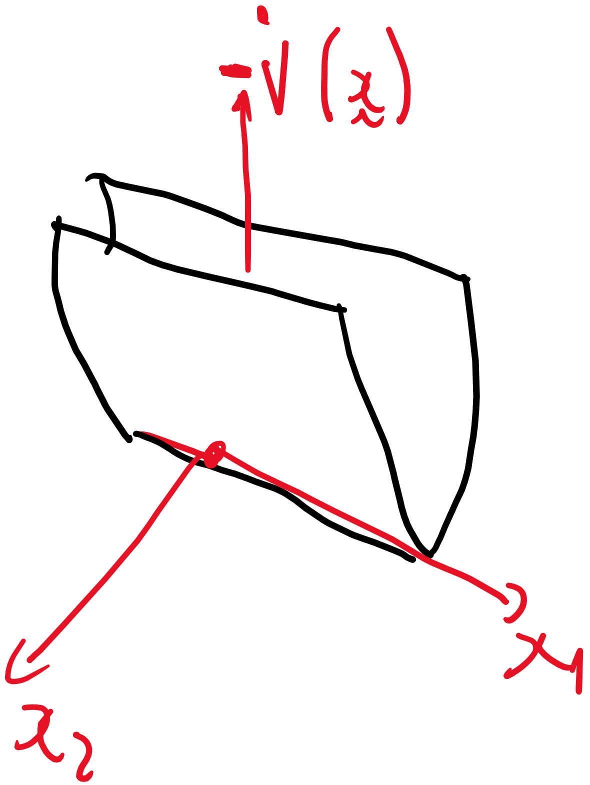
↳ SE FOR VÁLIDO $\forall \underset{\sim}{x}$ → GLOBALMENTE P.D.

↳ SE FOR VÁLIDO $|\underset{\sim}{x}| < R_0$ → LOCALMENTE PD

2) $\dot{V} = \dfrac{dV(\underset{\sim}{x})}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial \underset{\sim}{x}} \cdot \dot{\underset{\sim}{x}} = \dfrac{\partial V}{\partial \underset{\sim}{x}} \cdot f(\underset{\sim}{x})$ $\therefore$ $\left\{ \dot{\underset{\sim}{x}} = f(\underset{\sim}{x}) \right\}$

OU SEJA, $\dot{V}$ SÓ DEPENDE DE $\underset{\sim}{x}$ E $\dot{V}=0$ NA ORIGEM (x^*) POIS $f(\underset{\sim}{x}^*) = 0$

→ SE V FOR P.D. E $\dot{V}$ FOR SEMI-DEFINIDA NEGATIVA $(\dot{V}(\underset{\sim}{x}) \leq 0)$ ENTÃO $V(\underset{\sim}{x})$ É UMA FUNÇÃO DE LYAPUNOV

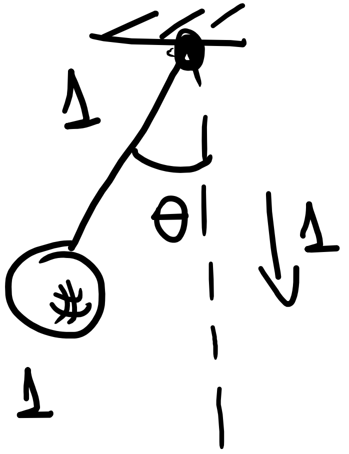


OBS: $\dot{V}$ É SEMI-DEFINIDA NEGATIVA $\begin{cases} \dot{V}(\underset{\sim}{0}) = 0 \\ \dot{V}(\underset{\sim}{x}) \leq 0 \end{cases}$

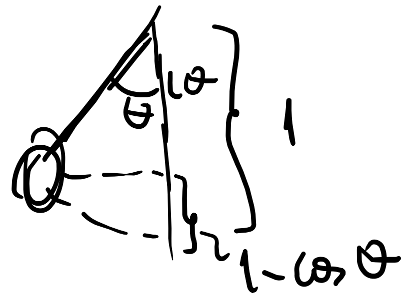
TEOREMA ESTABILIDADE LOCAL

→ SE NUMA REGIÃO B_{R0} EM TORNO DO EQUILÍBRIO $\underset{\sim}{x}^*$ EXISTIR UMA FUNÇÃO $V(\underset{\sim}{x})$ DE LYAPUNOV, ENTÃO $\underset{\sim}{x}^*$ É UM PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL (NO SENTIDO DE LYAPUNOV)

→ SE $\dot{V}(\underset{\sim}{x})$ FOR NEGATIVO DEFINIDO, A ESTABILIDADE É ASSINTÓTICA



$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \operatorname{sen}\theta = 0$$



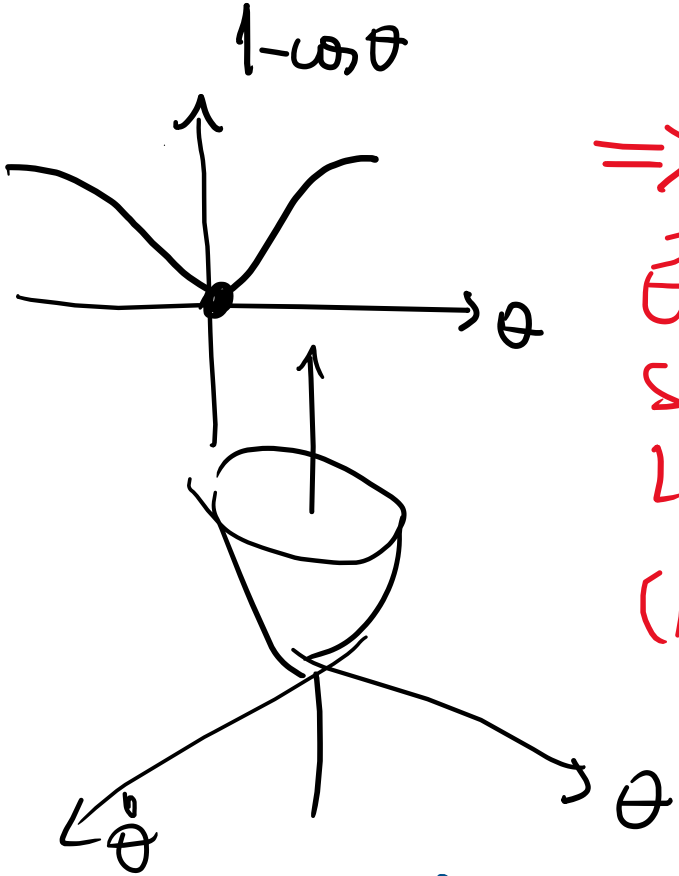
$$V(\theta,\dot{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2}_{\text{CINÉTICA}} + \underbrace{(1-\cos\theta)}_{\text{POTENCIAL GRAVITACIONAL}}$$

$\underset{\sim}{x}^* = (0,0)$

1) $V(\underset{\sim}{x}) = V(\theta,\dot{\theta})$ É P.D. NO ENTORNO DE x^*

2) $\dot{V}(\underset{\sim}{x}) = \dot{\theta}\cdot\underbrace{\ddot{\theta}}_{(-\dot{\theta}-\operatorname{sen}\theta)} + \operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\theta} = -\dot{\theta}^2$

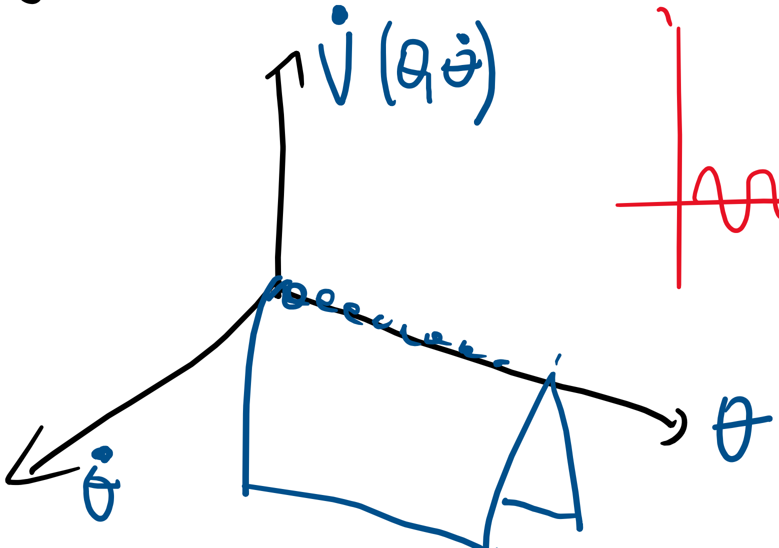
↳ S.N.D

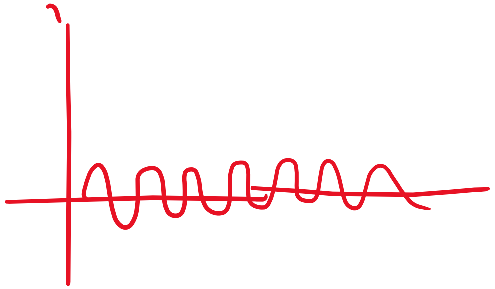


$\Rightarrow (\theta,\dot{\theta}) = (0,0)$

É ESTÁVEL NO SENTIDO DE LYAPUNOV

(NÃO SEI NADA SOBRE A ASSINTOTICIDADE)





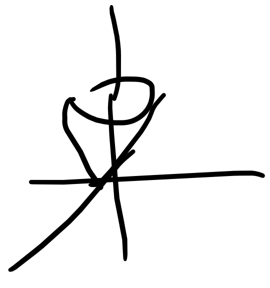
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2+x_2^2-2)-4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2+x_2^2-2) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $(x_1,x_2)=(0,0)$ É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL E A BACIA DE ATRAÇÃO É NO MÍNIMO O CÍRCULO $\underline{\underline{R=\sqrt{2}}}$

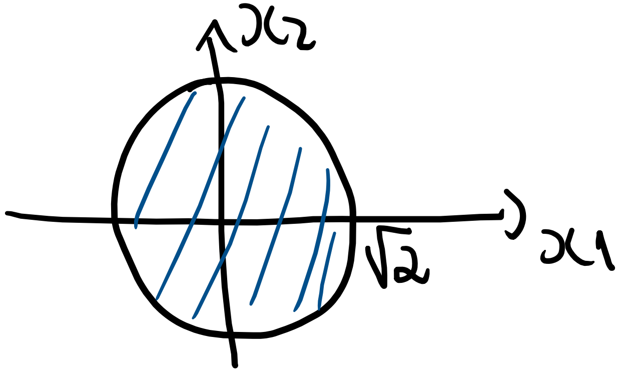
$(0,0)$ É PTO EQUILÍBRIO

CANDIDATA $\rightarrow V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

1) $V(x_1,x_2)$ É $\underline{\underline{PD}}$? SIM POIS $\begin{cases} V(x_1,x_2)=0 \text{ SE } (x_1,x_2)=(0,0) \\ V(x_1,x_2)>0 \text{ SE } (x_1,x_2)\neq 0,0 \end{cases}$



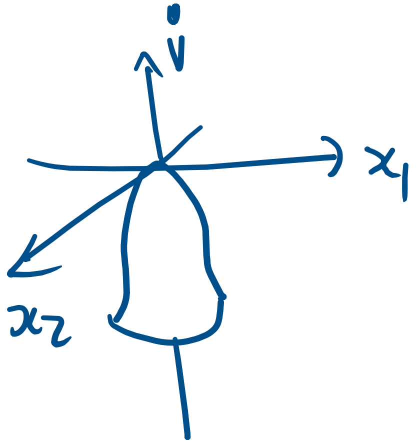
2) $\dot{V}(x_1,x_2)=2x_1\underline{\dot{x}_1}+2x_2\underline{\dot{x}_2}=\ldots=2\underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{>0}\underbrace{(\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{<2}-2)}_{<0}$



DENTRO DO CÍRCULO
$R=\sqrt{2}$

$\dot{V}=0$ p/ $x_1,x_2=0,0$

$\dot{V}<0$ p/ $x_1,x_2\neq 0,0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{N.D.}}$



ESTABILIDADE GLOBAL

O PONTO $\underset{\sim}{x} = 0$ SERÁ GLOBALMENTE ESTÁVEL SE EXISTIR

$$\begin{cases} V(\underset{\sim}{x}) = PD \\ \dot{V}(\underset{\sim}{x}) = ND \\ V(\underset{\sim}{x}) \to \infty \ \text{p/}\ x \to \infty \end{cases}$$

PROJETO CONTROLE USANDO LYAPUNOV

$$\boxed{\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0}$$

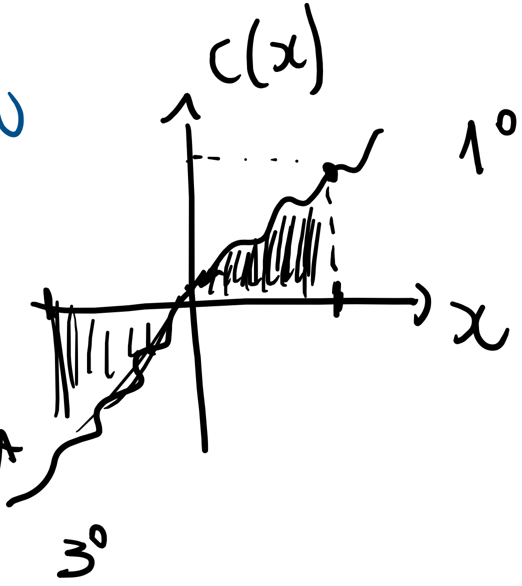
AMORT NÃO LINEAR — RESTAURAÇÃO NÃO LINEAR

CLASSE SIST. 2ª ORDEM

DISSIPATIVO

ONDE → $\begin{cases} \boxed{b(\dot{x})\,\dot{x} > 0} \; * \\ \boxed{c(x)\,x > 0} \end{cases}$

↳ MOLA RESTAURADORA



$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)\,dy$$

⇒ É PD? → SIM POIS $\int c(y)\,dy$ SEMPRE SERÁ > 0 SE $x > 0$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}\ddot{x} + c(x).\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^x c(y)\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^x c(y)\,dy \cdot \frac{dx}{dt} = c(x).\dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}.\left(-b(\dot{x}) - c(x)\right) + c(x).\dot{x}$$

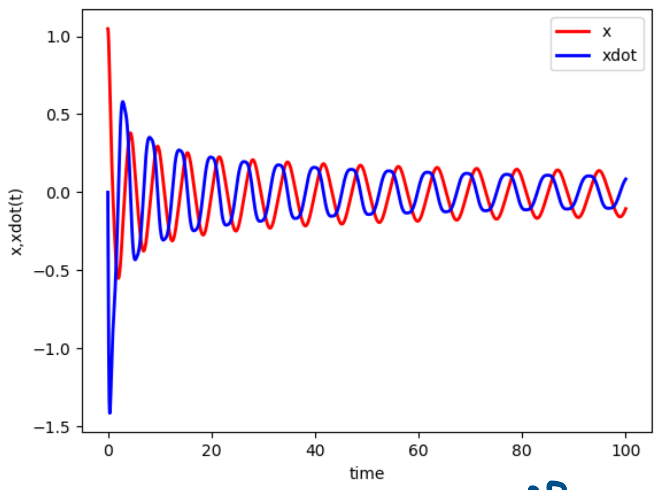
$$\dot{V}(x) = -b(\dot{x}).\dot{x} < 0$$

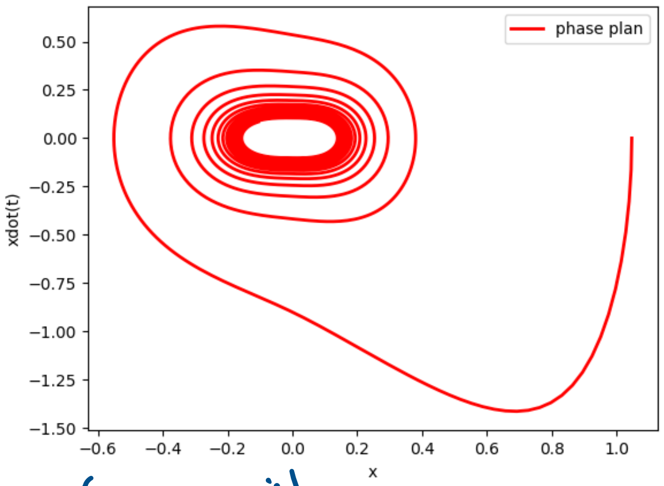
$\dot{V}(x) =$ SND POIS $\begin{cases} \dot{V} = 0 \text{ p/ } x = 0 \\ \dot{V} \leq 0 \text{ p/ } x \neq 0 \end{cases}$

PROJETE $u = u(x,\dot{x})$ QUE ESTABILIZE

$$\boxed{\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u}$$

$$u(x,\dot{x}) = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$$





EM MALHA FECHADA:

$$\ddot{x} + (-\dot{x}^3 - u_1(\dot{x})) + (x^2 - u_2(x)) = 0$$

* EM MF: $\ddot{x} + \dot{x}^3 + (x^2 + 5x|x|) = 0$

P/ SER ESTÁVEL

$$\begin{cases} (-\dot{x}^3 - u_1(\dot{x}))\cdot\dot{x} > 0 \rightarrow u_1(\dot{x}) = -2\dot{x}^3 \Rightarrow (-\dot{x}^3 + 2\dot{x}^3)\cdot\dot{x} = (\dot{x}^3)\cdot\dot{x} = \dot{x}^4 > 0 \checkmark \\ (x^2 - u_2(x))\cdot x > 0 \rightarrow u_2(x) = -5x|x| \Rightarrow (x^2 + 5x|x|)\cdot x = x^3 + 5x^2|x| > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,\dot{x}) = -2\dot{x}^3 - 5x|x|}$$ *

TEOREMA DOS CONJUNTOS INVARIANTES (LA SALLE)

Em geral, conseguimos mostrar que Vponto é SND e não conseguimos mostrar estabilidade assintótica.

CONJUNTO INVARIANTE

É UMA GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE PONTO DE EQUILÍBRIO

CONJUNTO G É UM CONJ. INVARIANTE SE PARA TODA TRAJETÓRIA QUE SE INICIA NUM PONTO DE G, CONTINUARÁ EM G P/ $\forall t \geq 0$

EX) 1) $G = \{\text{PTO EQUILÍBRIO}\} = \{x^*\}$

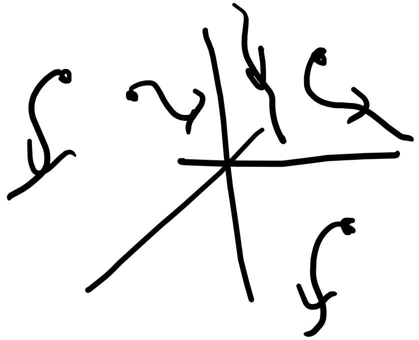
x^*

POR DEFINIÇÃO DE EQUILÍBRIO SE $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^*$, $\underset{\sim}{x}$ NÃO SAIRÁ DE $\underset{\sim}{x}^*$ NUNCA POIS $f(\underset{\sim}{x}^*) = \dot{\underset{\sim}{x}} = 0$

2) $G = \{\text{DOMÍNIO DE ATRAÇÃO DE UM PTO EQUIL.}\}$

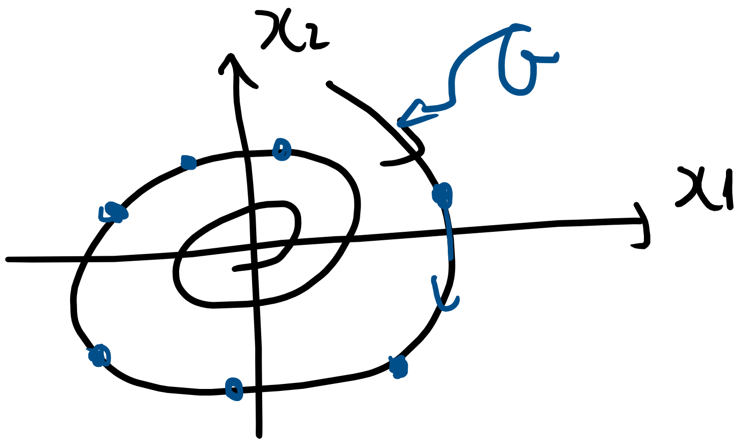
3) $G = \{\mathbb{R}^n\}$

TODO ESPAÇO ESTADO



4) $\Gamma = \{$ TRAJETÓRIA DE UM SISTEMA AUTÔNOMO $\}$

$\dot{x} = f(x)$



TEOREMA CONJUNTO INVARIANTE

- VERSÃO PARTICULAR

- SEJA $\dot{\underset{\sim}{x}} = f(\underset{\sim}{x})$ AUTONÔMO E $V(\underset{\sim}{x})$ UMA FUNÇÃO ESCALAR COM DERIVADA 1° CONTÍNUA

- ASSUMA QUE EM Ω, REGIÃO EM TORNO DA ORIGEM
  - ↳ $V(\underset{\sim}{x})$ LOCALMENTE P.D.
  - ↳ $\dot{V}(\underset{\sim}{x})$ SND

⇒ ↳ O CONJUNTO R DEFINIDO POR $\dot{V}(\underset{\sim}{x}) = 0$ NÃO CONTÉM OUTRA TRAJETÓRIA DE $\dot{\underset{\sim}{x}} = f(\underset{\sim}{x})$ A NÃO SER A TRIVIAL $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$

MAIOR INVARIANTE DENTRO DE R É O PONTO $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$

⇒ $\underset{\sim}{x} = 0$ É ESTÁVEL ASSINTOTICAMENTE

$$M\ddot{x} + b\,\dot{x}|\dot{x}| + K_0 x + K_1 x^3 = 0$$

$$V(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K_0 x^2 + \frac{1}{4}K_1 x^4$$

↳ $V(\underset{\sim}{x}) = PD \begin{cases} V(\underset{\sim}{x}) = 0 \ p/\ (x,\dot{x}) = 0{,}0 \\ V(x) > 0 \ p/\ (x,\dot{x}) \neq 0 \end{cases}$

↳ $\dot{V}(x) = -b|\dot{x}|^3$

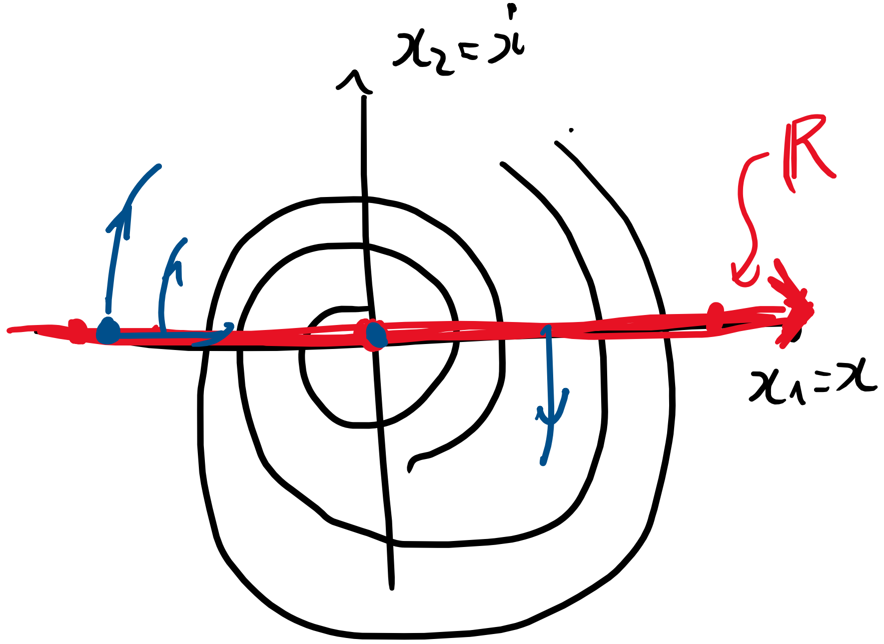
↳ S.N.D. $\begin{cases} \dot{V}(\underset{\sim}{x}) = 0 \ p/\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \\ \dot{V}(\underset{\sim}{x}) \leq 0 \ p/\ \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0} \end{cases}$

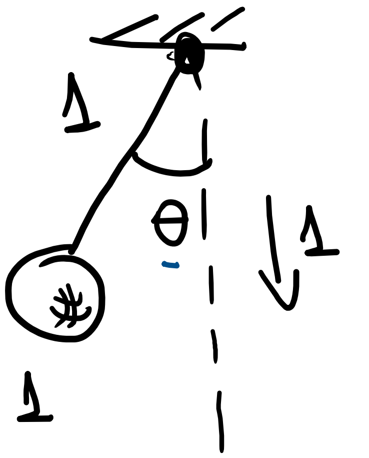
- O CONJUNTO R P/ $\dot{V}(\underset{\sim}{x}) = 0$ (OU SEJA, $\dot{x} = 0$)

$R = \{\dot{x} = 0\}$ ⇒ ÚNICO INVARIANTE DE R $\boxed{\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}}$

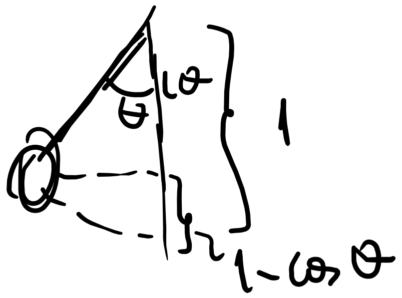
⇒ $x^* = (0,0)$ = ASSINT. ESTÁVEL

↳ O CONJUNTO R DEFINIDO POR $\dot{V}(\underset{\sim}{x}) = 0$ NÃO CONTÉM OUTRA TRAJETÓRIA DE $\dot{\underset{\sim}{x}} = f(\underset{\sim}{x})$ A NÃO SER A TRIVIAL $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$





$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \operatorname{sen}\theta = 0$$



$$V(\theta,\dot{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2}_{\text{CINÉTICA}} + \underbrace{(1-\cos\theta)}_{\text{POTENCIAL GRAVITACIONAL}}$$

$x^* = (0,0)$

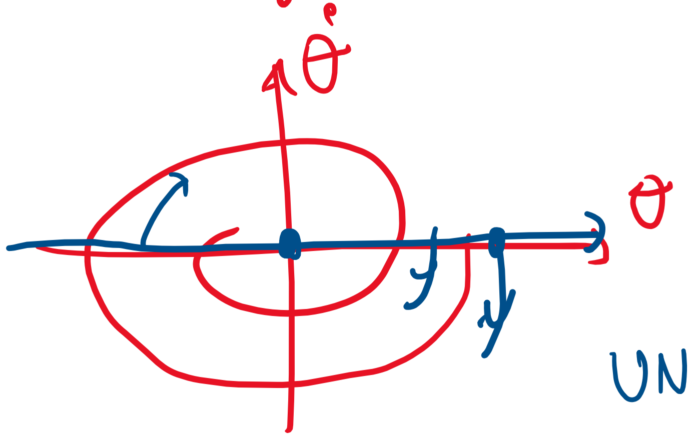
1) $V(x) = V(\theta,\dot{\theta})$ É P.D. NO ENTORNO DE x^*

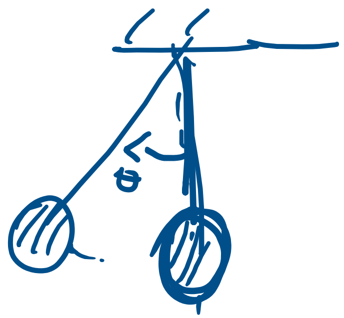
2) $\dot{V}(x) = \dot{\theta}\cdot\underbrace{\ddot{\theta}}_{(-\dot{\theta}-\operatorname{sen}\theta)} + \operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\theta} = -\dot{\theta}^2$

↳ S.N.D

$\to \dot{V}(x) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow R = \{\dot{\theta} = 0\}$





$\theta = 0$

ÚNICO CONJ. INVAR.

É $(\dot{\theta},\theta) = (0,0)$

→ ESTÁVEL ASSINT.