Modelos Probabilísiticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

PTC-3440 - 2021 - Aula 14-A

EPUSP

Probabilidade Limite

2o Caso: A cadeia é ergodica. Nesse caso temos que $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j$, independente de i. Chamando de π o vetor formado por π_i temos que π é a única solução que satisfaz:

$$\pi' = \pi' \mathbf{P}$$

→ jogamos 1 equação fora

$$1 = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i.$$

Temos também a seguinte interpretação para π_i. π_i representa a proporção do tempo que a cadeia de Markov permanece no estado i.

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_i \underbrace{P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)}_{p_{ij}} \cdot P(X_n = i)$$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = j) = \sum_i p_{ij} \overbrace{\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)}^{\pi_i}$$

Logo,

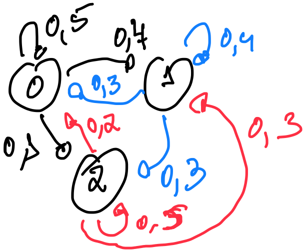
$$\begin{cases} \pi_j = \sum_i p_{ij}\pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

$\pi_j \to$ proporção do tempo que a cadeia fica no estado i

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que o mercado financeiro possa a cada dia estar em um dos 3 estados:

1. Estado 0: estável
2. Estado 1: em alta
3. Estado 2: em baixa



$$P^n \to \begin{bmatrix} \pi' \\ \vdots \\ \pi' \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que a cadeia de Markov possua a seguinte matriz de transição **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$\pi_0 = 0,3387$
$\pi_1 = 0,3710$
$\pi_2 = 0,2903$

Em 1 ano qual é proporção do tempo que o mercado fica em cada um dos estados acima?

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\pi' = \pi' P \to$$

$$\begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$\to$ jogamos 1 eq. fora

$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}5\,\pi_0 + 0{,}3\,\pi_1 + 0{,}2\,\pi_2 \\ \pi_1 = 0{,}4\,\pi_0 + 0{,}4\,\pi_1 + 0{,}3\,\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

3 variáveis (π_0, π_1, π_2)

3 equações

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 & -0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 & -0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Humor do mercado financeiro

Assumindo já as distribuições estacionárias, temos que resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0,5\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,2\pi_2, \\
\pi_1 &= 0,4\pi_0 + 0,4\pi_1 + 0,3\pi_2, \\
\pi_2 &= 0,1\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,5\pi_2, \\
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2.
\end{aligned}$$

Temos a seguinte solução:

$$\pi_0 = \frac{21}{62} = 33,87\%, \ \pi_1 = \frac{23}{62} = 37,1\%, \ \pi_2 = \frac{18}{62} = 29,03\%.$$

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que a probabilidade de chover ou não dependa das condições meteorológicas dos 2 dias anteriores. Definimos os estados:

1. Estado 0: choveu hoje e ontem
2. Estado 1: choveu hoje mas não ontem
3. Estado 2: não choveu hoje mas choveu ontem
4. Estado 3: não choveu hoje nem ontem

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que se tenha as seguintes informações após análise estatística:

1. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje e ontem é 0,7
2. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje mas não ontem é 0,5
3. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje mas choveu ontem é 0,4
4. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje nem ontem é 0,2

Modelo de Previsão Meteorológica

Obtemos que a matriz de transição **P** é:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Qual é o percentual de dias que temos:

A) Dois dias consecutivos de chuva?

B) Dois dias consecutivos sem chuva?

C) Dois dias alternados de chuva e sem chuva?

Disputa de Mercado

1. Pessoa que bebe coca-cola vai trocar para pepsi-cola com prob. 0,1 em uma semana.
2. Pessoa que bebe pepsi-cola vai trocar para coca-cola com prob. 0,2 em uma semana.

A) Qual é a probabilidade de uma pessoa que inicialmente bebe coca-cola beber pepsi-cola na semana 3?

B) Qual é o percentual de pessoas bebendo coca-cola e pepsi-cola depois de um longo período de tempo?

C) Suponha que cada consumidor compre 1 refrigerante por semana (1 ano = 52 semanas), e considere 100 milhões de consumidores. O lucro da venda de uma garrafa de coca-cola é de $\$\,1,00$. Pela propaganda, que custa $\$\,500$ milhões ao ano, pode-se reduzir de 10% para 5% a chance semanal do consumidor trocar de coca-cola para pepsi-cola. Vale a pena esse investimento?

a) 1 ↔ pessoa bebe coca-cola

2 ↔ " " pepsi-cola

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0{,}781 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}562 \end{bmatrix}$$

$$P_{12}^{(3)} = 0{,}219$$

b) $$P^n \xrightarrow{n \to \infty} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = 0{,}9\,\pi_1 + 0{,}2\,\pi_2 \Rightarrow 0{,}1\,\pi_1 = 0{,}2\,\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = 2\pi_2 \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

$$1 = 3\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 1/3, \quad \pi_1 = 2/3$$

c) Sem propaganda: $L = 52 \cdot \frac{2}{3} \cdot 100 = 3.466{,}7$ milhões

Com propaganda: $\bar{P} = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \bar{\pi}_1 = 0{,}95\,\bar{\pi}_1 + 0{,}2\,\bar{\pi}_2 \\ 1 = \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 \end{cases} \Rightarrow \bar{\pi}_1 = 4/5, \quad \bar{\pi}_2 = 1/5$$

propaganda

$$\bar{L} = 52 \cdot \frac{4}{5} \cdot 100 - 500 = 3.660 \text{ milhões}$$

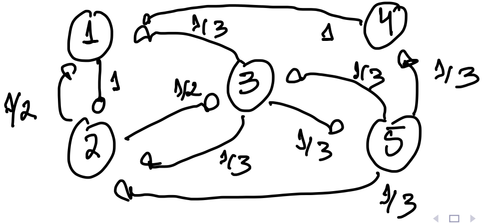
Vale a pena!

Algoritmo de PageRank

Considere o webgrafo abaixo que mostra o link entre 5 páginas.

A) Obtenha o rankeamento das páginas calculando as probabilidades estacionárias associadas à matriz de transição P.

B) Escreva a matriz Google $\hat{P} = 0,8P + 0,2D$ onde D é a matriz 5 por 5 formada por 1´s e determine o rank das 5 páginas nesse caso. Compare com o rankeamento obtido anteriormente.



a)
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

	Rank
$\pi_1 = 0,2927$	2
$\pi_2 = 0,3902$	1
$\pi_3 = 0,2195$	3
$\pi_4 = 0,0244$	5
$\pi_5 = 0,0732$	4

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + \pi_4$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5$$

$$\pi_2 = \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_5$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_5$$

$$\pi_4 = \frac{1}{3}\pi_5$$

b) $$D = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P} = 0{,}8\,P + 0{,}2\,D$$

↳ matriz de transição

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{21}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{11}{25} & \frac{1}{25} & \frac{11}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{23}{75} & \frac{23}{75} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{23}{75} \\ \frac{21}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{23}{75} & \frac{23}{75} & \frac{23}{75} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat{\pi}' = \hat{\pi}' P \\ \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_3 + \hat{\pi}_4 + \hat{\pi}_5 = 1 \end{cases}$$

joga 1 equação fora

	Rank
$\hat{\pi}_1 = 0{,}2864$	2
$\hat{\pi}_2 = 0{,}3490$	1
$\hat{\pi}_3 = 0{,}2046$	3
$\hat{\pi}_4 = 0{,}0652$	5
$\hat{\pi}_5 = 0{,}0946$	4

$P_i = P(A_i) = E(P(A|Y))$ $X_0 = i$

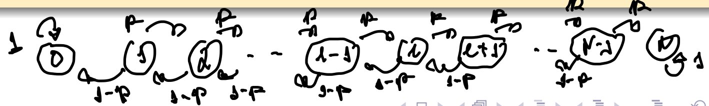
A ruína do jogador

Qual é a probabilidade do jogador atingir a fortuna N antes de quebrar, dado que começou com i ? Poderíamos resolver esse problema usando a fórmula do Caso 1 visto anteriormente. Vamos entretanto resolver esse problema de forma analítica, usando o cálculo de probabilidade por condicionamento. Seja A_i o evento o jogador atinge N antes de quebrar, começando de i. Seja $Y = 1$ se a primeira jogada é vitoriosa, $Y = 0$ caso contrário. Temos que

$$P_i = P(A_i) = E(P(A_i|Y)).$$

Temos também que para $1 \leq i \leq N-1$,

$$P(A_i|Y=1) = P(A_{i+1}) = P_{i+1} \quad \times p$$
$$P(A_i|Y=0) = P(A_{i-1}). = P_{i-1} \quad \times (1-p)$$



$$\begin{cases} P_i = p P_{i+1} + (1-p) P_{i-1}, & i = 1, \dots, N-1 \\ P_0 = 0, \quad P_N = 1 \end{cases}$$

A ruína do jogador

Logo,

$$\begin{aligned} P(A_i) = E(P(A_i|Y)) &= p \times P(A_i|Y=1) + (1-p) \times P(A_i|Y=0) \\ &= p \times P(A_{i+1}) + (1-p) \times P(A_{i-1}). \end{aligned}$$

Escrevendo $P_i = P(A_i)$, $q = 1 - p$, temos a seguinte equações a diferenças e condições inicial e terminal:

$$P_i = p \times P_{i+1} + q \times P_{i-1}, \; P_0 = 0, \; P_N = 1.$$

$$\underbrace{(p+q)}_{1} P_i = p P_{i+1} + q P_{i-1} \Rightarrow p (P_{i+1} - P_i) = q (P_i - P_{i-1})$$

$$P_{i+1} - P_i = \left(\frac{q}{p}\right)(P_i - P_{i-1})$$

$$\cancel{P_2} - P_1 = \left(\frac{q}{p}\right)\left(P_1 - \cancel{P_0}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) P_1 \qquad P_0 = 0$$

$$\cancel{P_3} - \cancel{P_2} = \left(\frac{q}{p}\right)\left(P_2 - P_1\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\longrightarrow \quad P_i - \cancel{P_{i-1}} = \left(\frac{q}{p}\right)\left(P_{i-1} - P_{i-2}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_N - \cancel{P_{N-1}} = \left(\frac{q}{p}\right)\left(P_{N-1} - P_{N-2}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1$$

$$P_i - P_1 = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j P_1$$

$$P_i = \left[\sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j\right] P_1 = \left[\frac{1 - (q/p)^i}{1 - q/p}\right] P_1$$

$$q \neq p \quad (\neq 1/2)$$

$$\underline{q \neq p \;(\neq 1/2)}$$

$$\sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j = \frac{1-(q/p)^i}{1-q/p}$$

$$i = N \Rightarrow P_N = 1 = \left[\frac{1-(q/p)^N}{1-q/p}\right] P_1$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1-q/p}{1-(q/p)^N}$$

$$P_i = \left[\frac{1-(q/p)^i}{\cancel{1-(q/p)}}\right]\left[\frac{\cancel{1-q/p}}{1-(q/p)^N}\right]$$

Logo, $P_i = \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$, $i = 0, \dots, N$

<u>Exercício</u>: Mostre que para $p = q = 1/2$,

$$P_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, N$$

$$\begin{cases} m_i = E(T \mid X_0 = i), \quad T = \text{número de rodadas até o jogo acabar (ganhando ou perdendo)} \\ m_i = (1 + m_{i+1})\,p + (1 + m_{i-1})\,q, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ m_0 = 0, \quad m_N = 0 \end{cases}$$

A ruína do jogador

Resolvendo para $q \neq p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Para $q = p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{i}{N}.$$

$N=7$, $p=0,4$. Na aula anterior, obtivemos

$P_3 = 0,14764$, $m_3 = 9,8325$.

Pela fórmula, $q = 1-p = 0,6$, $\frac{q}{p} = \frac{0,6}{0,4} = \frac{3}{2}$

$$P_3 = \frac{1-(3/2)^3}{1-(3/2)^7} = \frac{8-27}{\cancel{2^3}\left(\frac{128-2187}{2^{\cancel{7}\,4}}\right)} = \frac{16(27-8)}{2187-128}$$

$$= \frac{304}{2059} = 0,14764$$

$m_1 = (1+\cancel{m_0}^{\,0})\,0,6 + (1+m_2)\,0,4$

$m_2 = (1+m_1)\,0,6 + (1+m_3)\,0,4$

$m_3 = (1+m_2)\,0,6 + (1+m_4)\,0,4$

$m_4 = (1+m_3)\,0,6 + (1+m_5)\,0,4$

$m_5 = (1+m_4)\,0,6 + (1+m_6)\,0,4$

$m_6 = (1+m_5)\,0,6 + (1+\cancel{m_7}^{\,0})\,0,4$

$$(I-T)m=\mathbb{1} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 1 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 & 1 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 1 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \right. \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m_3 = 9,8324$$

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & p \neq 1/2 \\[2ex] \dfrac{i}{N}, & p = q = 1/2 \end{cases}$$

Fazendo $N \to \infty$

a) $q \geq p$ $\Rightarrow$ $(q/p) \overset{q>p}{>} 1$ $\Rightarrow$ $(q/p)^N \to \infty$

(ou seja, $p \leq 1/2$)

Logo, $P_e \xrightarrow{N \to \infty} 0$.

b) $q < p$ $\Rightarrow$ $(q/p) < 1$ $\Rightarrow$ $(q/p)^N \to 0$

$p > 1/2$

Logo, $P_e \xrightarrow{N \to \infty} 1 - (q/p)^i$