Modelos Probabilísiticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

PTC-3440 - 2021 - Aulas 13-14

EPUSP

Processos Estocásticos

Um processo estocástico $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas em $\mathbb{T}$, isto é, para cada $t \in \mathbb{T}$, $X(t)$ é uma variável aleatória. Por exemplo, poderíamos ter $\mathbb{T} = \{1, 2, ...\}$ ou $\mathbb{T} = [0, \infty)$.

t	$X(t)$
Discreto	Discreto
Contínuo	Contínuo

Ruína do Jogador

Rodada t

Um jogador, a cada instante de tempo, pode ganhar $R\$1,00$ com probabilidade p, ou pode perder $R\$1,00$ com probabilidade $1-p$. Seja

na rodada

$X(t)$, $t \in \mathbb{T} = \{0, 1, \ldots\}$ a fortuna do jogador no instante t. Temos que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é um processo estocástico que obedece a seguinte equação:

$$X(t+1) = X(t) + U(t+1)$$

onde $U(t) = 1$ com probabilidade p e $U(t) = -1$ com probabilidade $1-p$, e $X(0)$ é a fortuna inicial. Pergunta: Qual é a probabilidade da fortuna do jogador atingir uma determinada meta N antes de quebrar?

Processos de Markov

Vamos supor que $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots\}$ e que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ seja um processo estocástico tomando valores em um conjunto contável $\mathcal{X}$, por exemplo $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ou $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N\}$. Diremos que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma cadeia de Markov se

$$P(X(k+1) = j | X(0) = i_0, \ldots, \cancel{X(k-1)} = i_{k-1}, X(k) = i) = p_{ij}.$$

para todos os estados possíveis $i_0, \ldots, i_{k-1}, i, j$ e $k \geq 0$. Devemos ter $p_{ij} \geq 0$ e para todo $i \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} p_{ij} = 1.$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Pe = \begin{bmatrix} \sum_j p_{0j} \\ \vdots \\ \sum_j p_{Nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = e$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ é autovalor de P

Processos de Markov

Definimos a matriz de transição **P** como sendo:

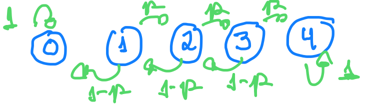
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \rightarrow (N+1) \times (N+1)$$

Ruína do Jogador
$N=4$

Diagrama de Markov



Ruína do Jogador

A ruína do jogador com meta de fortuna N é uma cadeia de Markov com $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N\}$ e a seguinte matriz de transição de probabilidade:

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1, \\ p_{ii+1} &= p, \quad p_{ii-1} = 1 - p, \\ p_{NN} &= 1. \end{aligned}$$

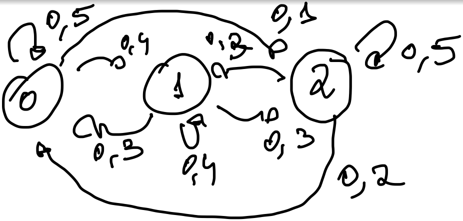
$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} T & A \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1-p \\ 0 & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}$$

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que o mercado financeiro possa a cada dia estar em um dos 3 estados:

1. Estado 0: estável
2. Estado 1: em alta
3. Estado 2: em baixa



Humor do Mercado Financeiro

Suponha que a cadeia de Markov possua a seguinte matriz de transição $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Em 1 ano qual é proporção do tempo que o mercado fica em cada um dos estados acima?

a	b
c	c
c	n
n	c
n	n

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que a probabilidade de chover ou não dependa das condições meteorológicas dos 2 dias anteriores. Definimos os estados:

1. Estado 0: choveu hoje e ontem
2. Estado 1: choveu hoje mas não ontem
3. Estado 2: não choveu hoje mas choveu ontem
4. Estado 3: não choveu hoje nem ontem

m	m	m	m
c c	c c	n c	n c
c c	n c	c n	n n
o h	o h	o h	o h

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que se tenha as seguintes informações após análise estatística:

1. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje e ontem é 0,7
2. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje mas não ontem é 0,5
3. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje mas choveu ontem é 0,4
4. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje nem ontem é 0,2

Dado que choveu 2ª e 3ª feira, qual é a prob. de chover na 5ª feira?

A = {Chover na 5ª feira}

Modelo de Previsão Meteorológica

Obtemos que a matriz de transição **P** é:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0\,(cc) & 1\,(nc) & 2\,(cn) & 3\,(nn) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 0\,(cc) \\ 1\,(nc) \\ 2\,(cn) \\ 3\,(nn) \end{array}.$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,12 & 0,21 & 0,18 \\ 0,35 & 0,2 & 0,15 & 0,3 \\ 0,2 & 0,12 & 0,2 & 0,48 \\ 0,10 & 0,16 & 0,10 & 0,64 \end{pmatrix}$$

$$P(A \mid X(0) = 0) = P^{(2)}_{00} + P^{(2)}_{01}$$
$$= 0,49 + 0,12 = \boxed{0,61}$$

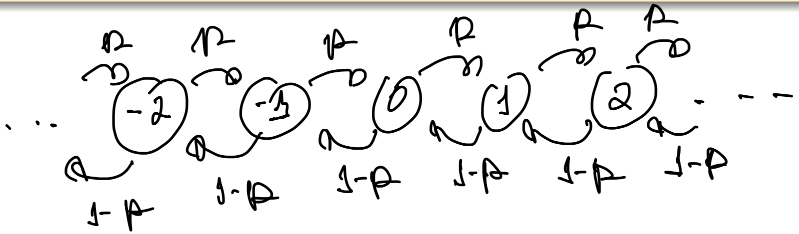
$$P^3 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0{,}403 & 0{,}12 & 0{,}207 & 0{,}27 \\ 0{,}345 & 0{,}12 & 0{,}205 & 0{,}33 \\ 0{,}2 & 0{,}176 & 0{,}120 & 0{,}504 \\ 0{,}15 & 0{,}168 & 0{,}11 & 0{,}572 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0(cc) & 1(nc) & 2(cn) & 3(nn) \end{matrix} \end{array} \leftarrow \quad P(A \mid X(0)=0) = p_{00}^{(3)} + p_{02}^{(3)} = 0{,}403 + 0{,}207 = \boxed{0{,}61}$$

Caminhada Aleatória

Considere $\mathcal{X} = \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$ e

$$p_{ii+1} = p, \quad p_{ii-1} = 1 - p.$$

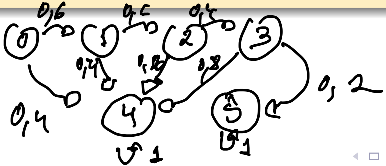
Este processo é conhecido como a caminhada aleatória.



Risco Operacional

Suponha que uma empresa financeira classifique os seus estados de processamento de transações de 0 a 5 de acordo com o tempo necessário para a sua liquidação, segundo o modelo abaixo.

1. Estado 0: transação está sem atraso
2. Estado 1: transação está com 1 dia de atraso
3. Estado 2: transação está com 2 dias de atraso
4. Estado 3: transação está com 3 dias de atraso
5. Estado 4: transação liquidada sem pagamento de multa
6. Estado 5: transação liquidada com pagamento de multa



Risco Operacional

A instituição tem uma série de dados no tempo razoável, e esses dados indicam que a cadeia de Markov possui a seguinte matriz de transição **P** é:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). = \left(\begin{array}{c|c} T & A \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

Qual é a probabilidade de uma transação terminar em um estado com pagamento de multa? Supondo 1000 transações por dia, cada transação envolvendo cerda de $R\$1.000.000,00$ (um milhão), que a multa seja de $0,01\%$ ao dia, e que as transações liquidadas com multa tenham em média 8 dias de atraso, qual é a perda esperada por dia e por mês (22 dias)?

$$p_{ij}^{(n)} = P(X(n+m)=j \mid X(m)=i) = P(X(n)=j \mid X(0)=i)$$

$\underline{n=2}$

$$p_{ij}^{(2)} = P(X(2)=j \mid X(0)=i) = \sum_{\ell} \underline{P(\overset{A}{X(2)=j}, \overset{B}{X(1)=\ell} \mid \overset{C}{X(0)=i})}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Definimos a matriz $\underline{\mathbf{P}^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]}$ onde

$$p_{ij}^{(n)} = P(X(n+m)=j \mid X(m)=i).$$

$$P(AB \mid C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = P(A \mid BC)\frac{P(BC)}{P(C)} = P(A \mid BC)\,P(B \mid C)$$

$$= \sum_{\ell} \underbrace{P(X(2)=j \mid X(1)=\ell, \cancel{X(0)=i})}_{p_{\ell j}} \underbrace{P(X(1)=\ell \mid X(0)=i)}_{p_{i\ell}} = \sum_{\ell} p_{i\ell}\, p_{\ell j}$$

$$= p_i\, p^j$$

$p_i \to$ linha i de P

$p^j \to$ coluna j de P

$$p_{ij}^{(2)} = p_i\, p^j \Rightarrow$$

$$\boxed{P^{(2)} = P^2}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Temos então as equações de Chapman-Kolmogorov:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{n+m} &= P(X(n+m)=j|X(0)=i) \\
&= \sum_{\ell\in\mathcal{X}} P(X(n+m)=j, X(n)=\ell|X(0)=i) \\
&= \sum_{\ell\in\mathcal{X}} P(X(n+m)=j|X(n)=\ell, X(0)=i)P(X(n)=\ell|X(0)=i) \\
&= \sum_{\ell\in\mathcal{X}} P(X(n+m)=j|X(n)=\ell)P(X(n)=\ell|X(0)=i) \\
&= \sum_{\ell\in\mathcal{X}} P(X(m)=j|X(0)=\ell)P(X(n)=\ell|X(0)=i) \\
&= \sum_{\ell\in\mathcal{X}} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell j}^{(m)}
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.

Modelo de Previsão Meteorológica

Dado que choveu na 2a e 3a feira, qual é a probabilidade de chover na 5a feira?

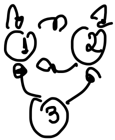
$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

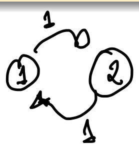
$$= \begin{pmatrix} 0,49 & 0,12 & 0,21 & 0,18 \\ 0,35 & 0,2 & 0,15 & 0,3 \\ 0,2 & 0,12 & 0,2 & 0,48 \\ 0,1 & 0,16 & 0,1 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Resposta: $0,49 + 0,12 = 0,61$.

Estados da cadeia

Os estados de uma cadeia de Markov podem ser classificados de recorrentes e transientes. Um estado *i* é recorrente se a probabilidade de re-entrar nesse estado começando dele mesmo é 1, transiente caso contrário. Em uma cadeia de Markov finita não se pode ter todos os estados transientes. Uma cadeia de Markov é irredutível se todos os estados se comunicam entre si.





$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{2n+1} = P$$

$$P^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelo de Previsão Meteorológica

Todos os estados são recorrentes. Nesse caso diz-se que a cadeia de Markov é ergodica.

Ruína do Jogador

Temos 2 estados recorrentes (na verdade chamados de absorventes), 0 e N, e todos os outros são transientes.

Risco Operacional

Temos 2 estados absorventes, 5 e 6, e todos os outros são transientes.

caso 1 $P = \left[\begin{array}{c|c} T & A \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$, $P^2 = \left[\begin{array}{c|c} T & A \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T & A \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} T^2 & TA + A \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$

$$P^3 = \begin{bmatrix} T & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^2 & (I+T)A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^3 & (I+T+T^2)A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Probabilidade Limite

O que podemos dizer sobre $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$? Vamos considerar a matriz $\mathbf{P}$ finita e 2 situações.

1o Caso: A matriz $\mathbf{P}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

onde $\mathbf{T}$ contém os estados transientes, e $\mathbf{I}$, a matriz identidade, contém os estados absorventes.

$0 < \alpha < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n$$

$$= I + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} T^n} - \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} T^n} = I$$

Efetuando os cálculos obtemos que

$\to I + T + T^2 + \cdots + T^{n-1}$

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^n & \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}^k\right)\mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

$\ell \times \ell$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{\ell 1} & \cdots & t_{\ell\ell} \end{bmatrix}$$

Estados Transientes:

$\{1, \ldots, \ell\}$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}^n = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

$m_i = E(T / X_0 = i)$, T = tempo até chegar em um estado absorvente

$$m_i = 1.\left(1 - \sum_{k=1}^{\ell} t_{ik}\right) + \sum_{k=1}^{\ell} (1 + m_k)\, t_{ik} \qquad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\ell \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\ell} t_{ik} m_k$$

Risco Operacional

Temos que

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

$$m_i - \sum_{k=1}^{\ell} t_{ik} m_k = 1 \;,\; i = 1, \dots, \ell \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m - Tm = (I - T)m = e \implies m = (I - T)^{-1} e$$

Risco Operacional

Segue portanto que

$$
(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}\mathbf{A} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0,9712 & 0,0288 \\
0,952 & 0,048 \\
0,92 & 0,08 \\
0,8 & 0,2
\end{pmatrix}
\end{array}
.
\begin{array}{l}
i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3
\end{array}
$$

Portanto temos que a probabilidade de uma transação terminar em atraso com multa, começando de sem atraso é $\underline{2,88\%}$, e obviamente de terminar sem multa é de $97,12\%$.

$$
P = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|cc}
0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\
0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\
\hline
 & & 0 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad A^{(2)}
$$

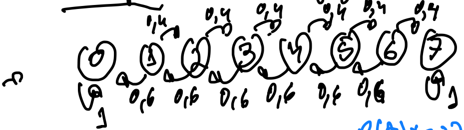
Calcule P^{20} e considere linha 3 $(X_0=3)$

$$
P_3^{(20)} = [\,0,03\ \ 0\ \ 0,0449\ \ 0\ \ 0,024\ \ 0 \ \vdots\ 0,7709\ \ 0,1303\,]
$$

$0,0989$ $\quad\rightarrow\quad$ $0,9012$

$$
\boxed{P(A \mid X_0=3) = 9,89\%}
$$

Exemplo: Ruína do jogador com $p=0,4$, $N=7$. Considere $X_0=3$.



a) Qual é a prob. de se ter pelo menos 21 partidas?

$A = \{$pelo menos 21 partidas$\}$

$$P(A|X_0=3) = \sum_{k=1}^{6} p_{3k}^{(20)} = P(X(20)\neq 7, X(20)\neq 0 \mid X_0=3)$$

Risco Operacional

A perda esperada para 1 dia é:

Perda esperada em 1 dia

$\cong 1000 \times 0,0288 \times ((1,0001)^8 - 1) \times 10^6 = R\$\,23.000,00.$

Perda esperada em 1 mês (22 dias) $= R\$\,22 \times 23.000,00 \cong R\$\,500.000,00.$

b) Qual é a prob. de ganhar o jogo e o número esperado de jogadas até o jogo acabar ($X_0=3$)

$$P_3 = \left[(I-T)^{-1} R^{(2)}\right]_{(3)} \simeq 0,14764$$

$$m_3 = \left[(I-T)^{-1} e\right]_{(3)} \simeq 9,8325$$

Probabilidade Limite

2o Caso: A cadeia é ergodica. Nesse caso temos que $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j$, independente de i. Chamando de π o vetor formado por π_i temos que π é a única solução que satisfaz:

$$\pi' = \pi'\mathbf{P}$$
$$1 = \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i.$$

Temos também a seguinte interpretação para π_i. π_i representa a proporção do tempo que a cadeia de Markov permanece no estado i.

Humor do mercado financeiro

Assumindo já as distribuições estacionárias, temos que resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0,5\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,2\pi_2, \\ \pi_1 &= 0,4\pi_0 + 0,4\pi_1 + 0,3\pi_2, \\ \pi_2 &= 0,1\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,5\pi_2, \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2. \end{aligned}$$

Temos a seguinte solução:

$$\pi_0 = \frac{21}{62} = 33,87\%, \;\; \pi_1 = \frac{23}{62} = 37,1\%, \;\; \pi_2 = \frac{18}{62} = 29,03\%.$$

A ruína do jogador

Qual é a probabilidade do jogador atingir a fortuna N antes de quebrar, dado que começou com i ? Poderíamos resolver esse problema usando a fórmula do Caso 1 visto anteriormente. Vamos entretanto resolver esse problema de forma analítica, usando o cálculo de probabilidade por condicionamento. Seja A_i o evento o jogador atinge N antes de quebrar, começando de i. Seja $Y = 1$ se a primeira jogada é vitoriosa, $Y = 0$ caso contrário. Temos que

$$P(A_i) = E(P(A_i|Y)).$$

Temos também que para $1 \leq i \leq N - 1$,

$$P(A_i|Y = 1) = P(A_{i+1})$$
$$P(A_i|Y = 0) = P(A_{i-1}).$$

A ruína do jogador

Logo,

$$\begin{aligned} P(A_i) &= E(P(A_i|Y)) = p \times P(A_i|Y=1) + (1-p) \times P(A_i|Y=0) \\ &= p \times P(A_{i+1}) + (1-p) \times P(A_{i-1}). \end{aligned}$$

Escrevendo $P_i = P(A_i)$, $q = 1 - p$, temos a seguinte equações a diferenças e condições inicial e terminal:

$$P_i = p \times P_{i+1} + q \times P_{i-1}, \ P_0 = 0, \ P_N = 1.$$

A ruína do jogador

Resolvendo para $q \neq p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Para $q = p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{i}{N}.$$