Eletromagnetismo — 7600021 — Terceiro ciclo

Terceira lista suplementar.

09/05/2021

1. **3.16** Derive $P_3(x)$ da fórmula de Rodrigues e verifique que $P_3(\cos\theta)$ satisfaz a equação diferencial para a função angular $\Theta(\theta)$ para $\ell = 3$. Verifique que P_3 e P_1 são funções ortogonais por integração explícita.

2. **3.18** O potencial na superfície de uma esfera de raio R é dado por

$$V_0 = k\cos 3\theta,$$

onde k é uma constante. Encontre o potencial dentro e fora da esfera, bem como densidade superficial de carga $\sigma(\theta)$ na esfera. Suponha que inexiste carga dentro ou fora da esfera.

3. **3.19** Suponha que o potencial $V(\theta)$ na superfície de uma esfera seja especificado, e que não haja carga dentro ou fora da esfera. Mostre que a densidade de carga na esfera é dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2R}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)^2 C_\ell P_\ell(\cos\theta),$$

onde

$$C_\ell = \int_0^\pi V_0(\theta)P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\, \mathrm{d}\theta.$$

4. **3.20** Encontre o potencial fora de uma esfera metálica *carregada* (carga Q, raio R) colocada num campo que, sem a esfera, seria $\vec{E}_0$, uniforme. Explique claramente onde você está posicionando o zero do potencial.

5. **3.21(b)** O potencial no eixo de um disco de raio R, uniformemente carregado com densidade σ, é

$$V(r,0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{r^2+R^2}-r\right).$$

Encontre o potencial para $r < R$, por meio da equação

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta),$$

considerando os três primeiros termos. [Nota: você deve quebrar a região $r < R$ em dois hemisférios, um acima e o outro abaixo do disco. Não suponha que os coeficientes A_ℓ sejam iguais nos dois hemisférios.]

6. **3.22** Uma casca esférica de raio R é carregada com densidade superficial σ_0 no hemisfério norte e $-\sigma_0$ no hemisfério sul. Encontre o potencial dentro e fora da esfera, calculando os coeficientes explicitamente até $\ell = 4$.

7. **3.23** Resolva a equação de Laplace por separação de variáveis em coordenadas cilíndricas, supondo que não haja dependência em z. [Assegure-se de ter encontrado todas as soluções para a equação radial; em particular, seu resultado deve acomodar o caso de um fio infinito carregado, para o qual você sabe a resposta].

8. **3.24** Encontre o potencial fora de um cano condutor infinitamente longo, de raio R, posicionado perpendicularmente a um campo elétrico que, na ausência do cano, seria $\vec{E}_0$, uniforme. Encontre a carga induzida na superfície do cano. Use o resultado do exercício .

9. **3.28(a)** Calcule o momento de dipolo de uma casca esférica de raio R carregada superficialmente com densidade $\sigma = k\cos\theta$, onde k é uma constante.

10. **3.33** Mostre que o campo elétrico de um dipolo com momento $\vec{p}$, obtido como gradiente do potencial, pode ser escrito na forma

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\Big).$$