TOPOLOGIA DA RETA

1. Conjuntos compactos

Definição 1.1. *Uma* ***cobertura*** *de um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é uma família* $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de conjuntos* $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathbb{R}$ *tal que* $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{C}_\lambda$. *Dizemos que a cobertura* $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *é*

- ***aberta*** *se todos os* $\mathcal{C}_\lambda$ *são conjuntos abertos.*
- ***finita*** *se* Λ *é um conjunto finito de índices.*

Definição 1.2. *Uma subcobertura da cobertura* $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *é uma subfamília* $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$, $\Lambda' \subset \Lambda$.

Exemplos 1.3.

- *A coleção de conjuntos* $C_0 =]-1/8, 1/8[$, $C_1 = (7/8, 9/8)$, $C_n =]1/n, (n+1)/n[$, $n \in \mathbb{N}$, *forma uma cobertura aberta (infinita) do intervalo* $[0, 1]$.

  Tomando $n \leq 9$, *obtemos uma subcobertura (finita) de* $[0, 1]$.
- *Excluindo* C_0 *e* C_1, *temos uma uma cobertura aberta (infinita) do intervalo* $]0, 1[$. *Agora não existe subcobertura finita.*

Definição 1.4. *Dizemos que um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é* ***compacto*** *se toda cobertura aberta de* A *contém uma subcobertura finita.*

Teorema 1.5. *(Borel-Lebesgue) Um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é compacto se e somente se* A *é fechado e limitado.*

Vamos dividir a prova em alguns passos.

Lema 1.6. *Se um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é compacto, então* A *é limitado.*

Date: June 12, 2021.

Esboço da demonstração: Basta verificar que $\{(-n, n), n \in \mathbb{N}\}$ não admite cobertura finita. $\square$

Lema 1.7. *Se um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto, então A é fechado.*

Esboço da demonstração: Basta verificar que se $p \in \bar{A} \setminus A$, então o complemntar dos intervalos $[p - 1/n, p + 1/n]$ não admite cobertura finita. $\square$

Lema 1.8. *Todo intervalo fechado $[a, b]$ é compacto.*

Esboço da demonstração: Supondo que a cobertura $\mathcal{C}$ não admite coberura finita, bisectamos o intervalo sucessivamente, obtendo intervalos encaixados I_n de comprimento $\frac{b-a}{2^n}$ que não possuem subcobertura enumerável. Tomando, porém um aberto de $\mathcal{C}$ contendo o único ponto de interseção dos I_n, obtemos uma cobertura finita de I_n para n suficientemente grande. $\square$

Demonstração do Teorema 1.5. Se A é compacto, ele compacto pelos lemas 1.6 e 1.7.

Se A é fechado e limitado, tomamos um intervalo contendo A, completamos a cobertura com o conjunto (aberto) $\mathbb{R} \setminus A$ e aplicamos o lema 1.8. $\square$

Definição 1.9. *Dizemos que um ponto $x \in \mathbb{R}$ é* ***ponto de acumulação*** *do conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se toda vizinhança de x contém um ponto de A, distinto de x.*

Proposição 1.10.

(Caracterização de compactos)Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:

(1) A é compacto.
(2) Todo subconjunto infinito de A possui ponto de acumulaçao em A.

(3) Toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de A possui uma subsequência convergente para um ponto $x \in A$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2). Se X não possui pontos de acumulação, podemos encontrar para cada $x \in A$, um intervalo aberto I_x tal que $I_x \cap X = \{x\}$, formando uma cobertura de A. Tomando uma subcobertura finita, ela conterá um número finito dos I_x, digamos $I_{x_1}, I_{x_1}, \cdots, I_{x_n}$. Segue que $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_2\}$ é finito.

(2) $\Rightarrow$ (3). Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em A. Se o conjunto dos termos $\{x_n\}$ da sequência é finito, então existe uma subsequência constante. Se $\{x_n\}$ é infinito segue de (2) que existe uma ponto de acumulação x desse conjunto que será então limite de uma subsequência.

(3) $\Rightarrow$ (1). Basta mostrar que A é fechado e limitado. Se A não é limitado tomamos $x_1 \in A$ e x_{n+1} com $|x_{n+1}| \geq |x_n| + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é então ilimitada, portanto não tem subsequência convergente, contradição.

Se Se A não é fechado, existe $x \in \bar{A} - A$. que é limite de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de A. Daí toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também convergiria para $x \notin A$, contradição.

□