TOPOLOGIA DA RETA

Vamos considerar alguns conceitos que pertencem à area da Matemática conhecida como **Topologia**, que permite falar de questões como limite, proximidade, convergência, continuidade etc. sem, necessariamnte introduzir a noção de distência. O assunto é muito extenso, mas aqui vamos tratar apenas o caso especial da reta real e apenas o necessário para esclarecer conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

1. Conceitos básicos

Lembremos inicialmente que denominamos vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}$ a qualquer conjunto $V(x) \subset \mathbb{R}$, contendo um intervalo aberto $]a, b[$ com $x \in]a, b[$.

Definição 1.1. *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é:*

- ***ponto interior*** *de A se existe uma vizinhança $V(x)$ de x. contida em A.*
- ***ponto aderente*** *de A se toda vizinhança $V(x)$ de x, contém algum ponto de A.*

Denotaremos por $\overset{\circ}{A}$ e denominaremos **interior de** A o conjunto dos pontos interiores de A. Denotaremos por $\bar{A}$ e denominaremos **fecho (ou aderência) de** A o conjunto dos pontos aderentes de A. Não é difícil verificar que $\overset{\circ}{A} \subset A$ e $A \subset \bar{A}$.

Date: June 9, 2021.

Definição 1.2. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é denominado:*

- ***aberto*** *se* $\overset{\circ}{A} = A$*,*
- ***fechado*** *se* $A = \bar{A}$*.*

Em outras palavras, $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, para todo $x \in A$, existe algum intervalo aberto contendo x e totalmente contido em A. e fechado se todo $x \in \mathbb{R}$, que possui pontos de A arbitrariamente próximos está em A.

Exemplos 1.3.
O intervalo aberto $]a, b[$ *é um conjunto aberto.*
O intervalo fechado $[a, b]$ *é um conjunto fechado.*
O intervalo $[a, b[$ *não é aberto nem fechado.*
O conjunto vazio $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}$ *são simultaneamente abertos e fechados.*
Todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ *é fechado.*
O fecho de um conjunto A *é fechado.*
O interior de um cojunto A *é aberto.*

Proposição 1.4. *Um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é fechado se e somente se seu complementar* $\mathbb{R} \setminus A$ *é aberto.*

Dem: Suponhamos que A é fechado e seja $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Então $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{A}$. Portanto existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que $V(x) \cap A = \emptyset \to V(x) \subset A$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto e seja $x \in \bar{A}$. Então toda vizinhança de x intercepta A de onde segue que $x \notin \mathbb{R} \setminus A$ e, portanto $x \in A$. $\square$

Proposição 1.5.

(1) *Se* $A_{\lambda \in \Lambda}$ *é uma família qualquer de abertos de* $\mathbb{R}$*, então a união* $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ *é um conjunto aberto.*
(2) *Se* A_1 *e* A_2 *são subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}$*, então* $A_1 \cap A_2$ *é subconjunto aberto.*

Dem:

(1) Se $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ então $x \in A_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Sendo A_λ aberto, existe uma vizinhança de x, $V(x) \subset A_\lambda 4$ e, daí $V(x) \in \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

(2) (1) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_1$. Sendo A_1 e A_1 abertos, existem vizinhanças de x, $V_1(x) \subset A_1$ e $V_2(x) \subset A_2$. Segue que $V(x) := V_1(x)\ capV_2(x)$ é vizinhança de x contida em $A_1 \cap A_2$. □

Corolário 1.6.

(1) *Se $A_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família qualquer de fechados de $\mathbb{R}$, então a interseção $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é um conjunto fechado.*
(2) *Se A_1 e A_2 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então $A_1 \cup A_2$ é subconjunto fechado.*

Dem: *Basta tomar complementos na proposição anterior e usar as "Leis de Morgan".* □

Proposição 1.7. *(Caracterização de abertos de $\mathbb{R}$) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se e somente se é união de intervalos abertos.*

Dem: *Se A é aberto, para cas x existe uma intervalo aberto $I(x) \subset A$, contendo x. Segue que $A = \cup_{x\in A} I(x)$. A reciproca segue da proposição* **??** □

Observação 1.8. *Pode-se mostrar que a união acima pode ser tomada enumerável.*

Proposição 1.9. *(Caracterização de fechados de $\mathbb{R}$) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é fechado se e só se toda sequência convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de A converge para um ponto $x \in A$.*

Dem: *suponhamos que A seja fechado e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Então, toda vizinhança*

$V(x)$ de x conterá x_n, para n suficietemente grande. Segue que $x \in \bar{A} = A$.

Reciprocamente, suponhamos que toda sequência convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de A converge para um ponto $x \in A$ e seja $x \in \bar{A}$. Então todo intervalo da forma $]x-1/m, x+1/n$ contém um ponto $x_n \in A$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x que, portanto, pertence a A.