Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 5 - Introdução aos limites

Nesta aula, apresentaremos a noção de continuidade.

Serão trabalhados os seguintes tópicos nesta aula:

1. Noção de continuidade de função
2. Exemplos numéricos.

Apresentação

No tópico anterior foi feito apresentado o conceito de limites infinitos. Nesta aula apresentaremos o conceito de continuidade, que são úteis em algumas aplicações.

A noção de continuidade em Matemática é a que utilizamos no dia a dia, isto é, onde não há interrupção ou, então, onde não existem partes separadas umas das outras.

Definição: Seja f uma função e a ∈ Dom(f), onde Dom(f) é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos. f é dita contínua em a, se:

1. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe.*

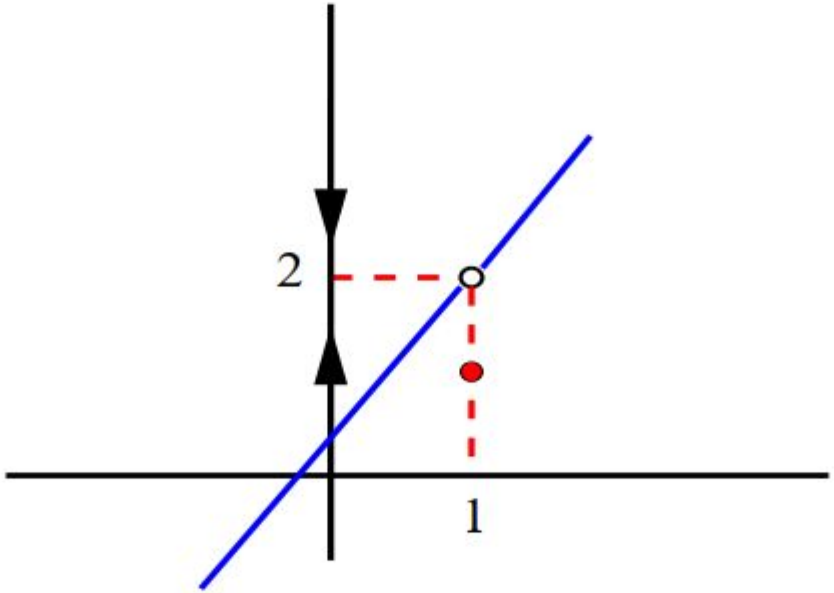
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$

Se f não verifica qualquer das condições da definição, f é dita **descontínua** em a.

Exemplo:

Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$


2
1

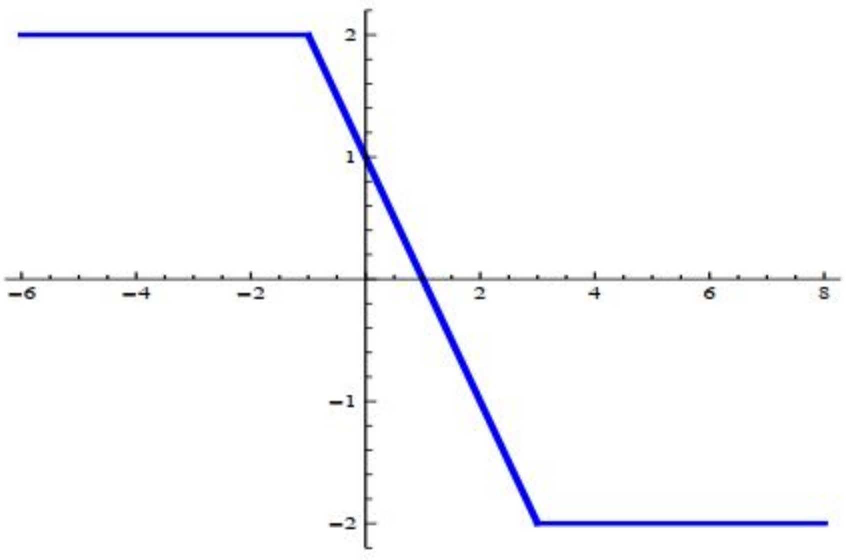
Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ Ax + B & \text{se} \quad -1 < x < 3 \\ -2 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Determine A e B tais que f seja uma função contínua nos reais.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 - x & \text{se} \quad -1 < x < 3 \\ -2 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$


2
1
−1
−2
−6
−4
−2
2
4
6
8

Definição: f é contínua em a se, e somente se:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ x \in\ Dom(f) \text{ e } 0 \leq |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| <\ \varepsilon$$

Se f não verifica a condição da definição, f é dita **descontínua** em a.

Proposição: Sejam f e g funções contínuas no ponto a. Então:

1. $\alpha f + \beta g$ *são contínuas em a, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f\,g$ *é contínua em a.*
3. $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em a, se* $a \in Dom(\dfrac{f}{g})$.

Proposição: Sejam f e g funções tais que o limite da f no ponto a é b e g é uma função contínua em b, então:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

Exemplo:

A função $g(x) = e^x$ é contínua em $\mathbb{R}$; logo, se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então:

$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Aplicação:

$$\lim_{x \to 1} e^{\frac{x^2-1}{x+1}} = e^{\lim_{x \to 1} (x-1)} = e^0 = 1.$$

Exemplo:

A função $g(x) = ln(x)$ é contínua em $(0, +\infty)$; logo, se $\lim_{x \to a} f(x) \in (0, +\infty)$, então:

$$\lim_{x \to a} ln\big(f(x)\big) = ln\big(\lim_{x \to a} f(x)\big).$$

Aplicação:

$$\lim_{x \to 1} ln\left[\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}\right] = ln\left[\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}\right] = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP