Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 4 - Introdução aos limites

Nesta aula, apresentaremos alguns limites fundamentais.

Profª. Felipe Rocha Felix

Serão trabalhados os seguintes tópicos nesta aula:

1. Limites fundamentais
2. Exemplos numéricos.
3. Aplicações.

Profª. Felipe Rocha Felix

Apresentação

No tópico anterior foi feito apresentado o conceito de limites infinitos. Nesta aula apresentaremos alguns limites fundamentais, que são úteis em algumas aplicações.

Começaremos a aula com o seguinte problema:

1. Sabemos que se uma quantia A_0 é investida a uma taxa r de juros compostos, capitalizados m vezes ao ano, o saldo A(t), após t anos é dado por:

$$A(t) = A_0\,(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

Pergunta: E se o juros for capitalizado continuamente?

A resposta para a pergunta anterior será dada a seguir:

Limites fundamentais

Observe o comportamento das tabelas a seguir:

x	sen (x)	sen(x)/x
1,5	0,997494987	0,664996658
1,4	0,985449730	0,703892664
1,3	0,963558185	0,741198604
1,2	0,932039086	0,776699238
1,1	0,891207360	0,810188509
1,0	0,841470985	0,841470985
0,9	0,783326910	0,870363233
0,8	0,717356091	0,896695114
0,7	0,644217687	0,920310982
0,6	0,564642473	0,941070789
0,5	0,479425539	0,958851077
0,4	0,389418342	0,973545856
0,3	0,295520207	0,985067356
0,2	0,198669331	0,993346654
0,1	0,099833417	0,998334166

x	sen (x)	sen(x)/x
0,0500	0,04997917	0,99958339
0,0400	0,03998933	0,99973335
0,0300	0,02999550	0,99985001
0,0200	0,01999867	0,99993333
0,0100	0,00999983	0,99998333
0,0050	0,00499998	0,99999583
0,0040	0,00399999	0,99999733
0,0030	0,00300000	0,99999850
0,0020	0,00200000	0,99999933
0,0010	0,00100000	0,99999983
0,0005	0,00050000	0,99999996
0,0004	0,00040000	0,99999997
0,0003	0,00030000	0,99999999
0,0002	0,00020000	0,99999999
0,0001	0,00010000	1,00000000

As tabelas anteriores indicam a razão entre o sen(x)/x fica cada vez mais próximo do 1 quando x se aproxima de zero. Esta relação é conhecida como 1º limite fundamental.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Profª. Felipe Rocha Felix

Para a obtenção do último limite fundamental é fundamental ter em mãos o teorema do confronto, que tem o seguinte enunciado:

Se g(x) ≤ h(x) ≤ f(x) tal que f(x) e g(x) tem limite L quando x tende a a, então, h(x) também tem o mesmo limite L quando x tende a a.

A seguir, daremos exemplos que ilustram o teorema do confronto.

Profª. Felipe Rocha Felix

Calcule o limite:

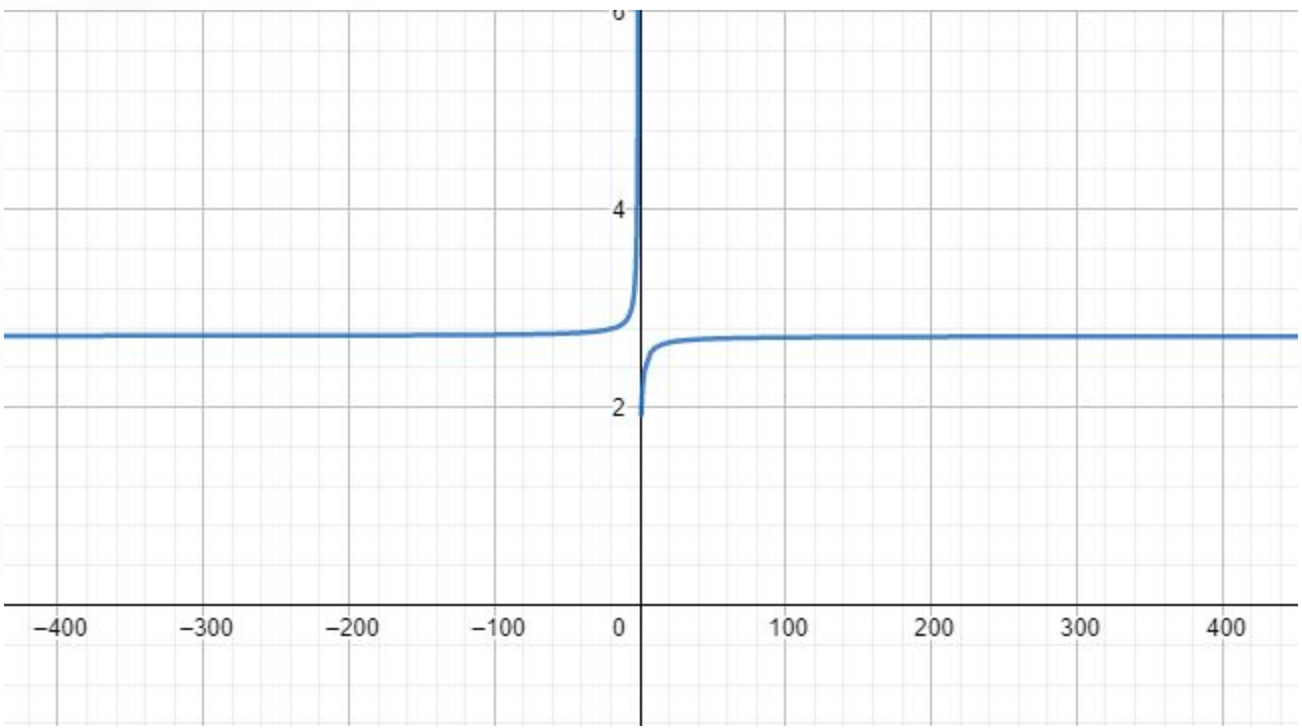
$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Apresentaremos um novo limite fundamental. Para isso observe o comportamento dos valores das tabelas a seguir, com relação a função:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

x	(1+1/x)^x
1,00E+03	2,716923932
1,00E+04	2,718145927
1,00E+05	2,718268237
1,00E+06	2,718280469
1,00E+07	2,718281694
1,00E+08	2,718281798
1,00E+09	2,718282052
1,00E+10	2,718282053
1,00E+11	2,718282053

x	(1+1/x)^x
-1,00E+03	2,719642216
-1,00E+04	2,718417755
-1,00E+05	2,71829542
-1,00E+06	2,718283188
-1,00E+07	2,718281963
-1,00E+08	2,718281856
-1,00E+09	2,718281753
-1,00E+10	2,718282054
-1,00E+11	2,718282053


6
4
2
−400
−300
−200
−100
0
100
200
300
400

As tabelas anteriores indicam que quanto maior o número x a função f(x) se aproxima de um valor constante.

Este valor é a conhecido como constante de Euler.

$$e \approx 2,71828\ldots$$

Agora apresentaremos o terceiro limite fundamental. Também fizemos uma tabela para ilustrar a situação, com a seguinte função:

$$f(x) = \left(\frac{2^x - 1}{x}\right)$$

x	(2^x-1)/x	|(2^x-1)/x - ln(2)|
0,1	0,7177346254	0,024587444802986
0,01	0,6955550057	0,002407825111943
0,001	0,6933874626	0,000240282020796
0,0001	0,6931712038	0,000024023205052
0,00001	0,6931495828	0,000002402260018
0,000001	0,6931474208	0,000000240233904
0,0000001	0,6931472041	0,000000023518369
0,00000001	0,6931471841	0,000000003534355
0,000000001	0,6931470953	0,000000085283487
0,0000000001	0,6931477614	0,000000580850328

Observamos que quando x se aproxima de 0 a função f(x) se aproxima de um valor fixo. Na terceira coluna da tabela fizemos o módulo da diferença do valor obtido pela função f(x) pelo ln(2) [logaritmo neperiano de 2 ou logaritmo natural de 2]

Apresentaremos o 3º limite fundamental:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = ln(a)$$

Com,

$$a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$$

Agora faremos alguns exemplos para aplicarmos os limites fundamentais que aprendemos:

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x}.$$

Profª. Felipe Rocha Felix

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{sen(3x)}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+b}\right)^{x}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x - b^x}{x}$$

Começamos a aula com o seguinte problema:

1. Sabemos que se uma quantia A_0 é investida a uma taxa r de juros compostos, capitalizados m vezes ao ano, o saldo A(t), após t anos é dado por:

$$A(t) = A_0 (1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

Pergunta: E se o juros for capitalizado continuamente?

A resposta será dada a seguir:

$$A(t) = A_0\,(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP