Aula passada: Comparação de Tratamentos com Medidas Repetidas

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow 1^{\underline{a}} \text{ cond. exp.} \\ \rightsquigarrow 2^{\underline{a}} \text{ cond. exp} \\ \\ \rightsquigarrow p^{\underline{a}} \text{ cond. exp} \end{matrix} \qquad X \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

Hipótese: $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$

$\iff \mu_2 - \mu_1 = 0 \quad \mu_3 - \mu_2 = 0 \quad \dots \quad \mu_p - \mu_{p-1} = 0 \quad \iff$

$$C\mu = 0 \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(p-1)\times p}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(p-1)\times p} \qquad C_1\mu = 0 \iff \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ \vdots \\ \mu_1 - \mu_p = 0 \end{cases}$$

Qualquer escolha de C que teste as igualdades de médias produzirá o mesmo valor de T^2.

5 - Inferência para a Matriz de Covariância

$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$\hat{\mu} = \bar{X}$ $\quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_i - \bar{X})(\underset{\sim}{X}_i - \bar{X})'$ est. de máxima verossimilhança de Σ.

$S^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_i - \bar{X})(\underset{\sim}{X}_i - \bar{X})'$ estimador não viciado de Σ.

<u>Teste de Hipóteses para uma única matriz de covariância</u>

$H_0: \Sigma = \Sigma_0$

$H_a: \Sigma \neq \Sigma_0$

Tomada uma amostra aleatória de tamanho n, $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \ldots, \underset{\sim}{X}_n$

Estatística de Teste (da razão de verossimilhanças)

$$L = (n-1)\left[\ln|\Sigma_0| - \ln|S^*| + tr\left(S^* \Sigma_0^{-1}\right) - p\right]$$

Para n grande, rejeitamos H_0 ao nível α se

$L > \chi^2_\nu(\alpha)$ $\quad \nu = \frac{p(p+1)}{2}$ graus de liberdade

Para n moderado, utiliza-se a estatística

$$L' = \left\{ 1 - \frac{1}{6(n-1)} \left[2p + 1 - \frac{2}{p+1} \right] \right\} . L$$

(Correção de Bartlett)

e rejeita-se H_0 ao nível α se

$$L' > \chi^2_{\nu}(\alpha) \qquad \nu = \frac{p(p+1)}{2}$$

Exemplo

Tempo de reação nas três condições A, B e C.

Para uma amostra de $n=20$ observações obteve-se

$$S^* = \begin{bmatrix} 3{,}42 & 2{,}60 & 1{,}89 \\ & 8{,}00 & 6{,}51 \\ & & 9{,}62 \end{bmatrix}.$$

Testar a hipótese $H_0 : \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 6 & 5 \\ & & 10 \end{bmatrix}.$

$$|\Sigma_0| = 86 \qquad |S^*| = 88{,}6355$$

$$tr(S^* \Sigma_0^{-1}) = 3{,}2222 \qquad \nu = \frac{p(p+1)}{2} = \frac{3.4}{2} = 6$$

$$\therefore \; L = 3{,}65 \qquad L' = 3{,}55$$

n moderado, usar L'.

$\alpha = 0{,}05 \quad \chi^2_6(0{,}05) = 12{,}6$. Não rejeitamos H_0.

Teste de Igualdade de Matrizes de Covariância

K populações normais p-variadas

$$\underset{\sim}{X}_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_1)$$

$$\underset{\sim}{X}_2 \sim N_p(\mu_2, \Sigma_2)$$

$$\vdots$$

$$\underset{\sim}{X}_K \sim N_p(\mu_K, \Sigma_K)$$

Tomadas amostras de tamanho n_ℓ da ℓ-ésima população, se S^*_ℓ é a matriz de covariância amostral (denominador $n_\ell - 1$) da amostra da ℓ-ésima população, a estatística de teste para

$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_K$ é

$$M = C\left[\sum_{\ell=1}^{K}(n_\ell - 1)\ln|S^*_c| - \sum_{\ell=1}^{K}(n_\ell - 1)\ln|S^*_\ell|\right]$$

onde

$$C = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(K-1)}\left(\sum_{\ell=1}^{K}\frac{1}{n_\ell - 1} - \frac{1}{\sum(n_\ell - 1)}\right)$$

$$S^*_c = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{K}(n_\ell - 1)}\sum_{\ell=1}^{K}(n_\ell - 1)S^*_\ell$$

Rejeita-se H_0 ao nível α se $M > \chi^2_\nu(\alpha)$

$$\nu = \frac{(k-1)\,p\,(p+1)}{2}.$$

Obs;

- Este teste é assintótico e vale para todos os n_ℓ grandes.
- Se todos os n_ℓ são iguais a n então

$$C = 1 - \frac{(2p^2+3p-1)(k+1)}{6(p+1)kn}.$$

- O caso em que $k=2$ é o mais utilizado.

Exemplo

Em um experimento para comparar os tempos médios de reação de homens e mulheres, 33 homens e 33 mulheres foram submetidos a estímulos visuais em dois instantes. Para cada unidade amostral foram avaliadas as variáveis

X_1 - tempo de reação no 1º instante e

X_2 - tempo de reação no 2º instante.

As matrizes de covariância amostrais observadas foram

$$S_1^* = \begin{bmatrix} 4{,}32 & 1{,}88 \\ 1{,}88 & 9{,}18 \end{bmatrix} \qquad S_2^* = \begin{bmatrix} 2{,}52 & 1{,}90 \\ 1{,}90 & 10{,}06 \end{bmatrix}$$

↳ homens ↳ mulheres

Testar a hipótese de igualdade das matrizes de covariâncias para as duas populações.

X_{1ij} - valor do j-ésimo tempo de reação ($j=1,2$) do i-ésimo elemento amostral da pop. 1

X_{2ij} - " " " " " ... da pop. 2

$$\underset{\sim}{X}_{1i} = \begin{bmatrix} X_{1i1} \\ X_{1i2} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{X}_{2i} = \begin{bmatrix} X_{2i1} \\ X_{2i2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to 1^{\circ} \text{ inst} \\ \to 2^{\circ} \text{ inst} \end{matrix}$$

1ª pop 2ª pop

$i = 1, 2 \dots n_1$ $i = 1, 2 \dots n_2$

$$\underset{\sim}{X}_{1i} \sim N_2(\mu_1, \Sigma_1) \qquad \underset{\sim}{X}_{2i} \sim N_2(\mu_2, \Sigma_2)$$

$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2$

$H_a: \Sigma_1 \neq \Sigma_2$

$$S_c^* = \frac{1}{32+32}\left[32 S_1 + 32 S_2\right] = \begin{bmatrix} 3{,}42 & 1{,}89 \\ 1{,}89 & 9{,}62 \end{bmatrix}$$

$C = 0{,}965$

$$M = 0{,}965\left[64 . \ln|S_c^*| - 32(\ln|S_1| + \ln|S_2|)\right]$$

$$= 0{,}965\left[64 \ln 29{,}328 - 32(\ln 36{,}123 + \ln 21{,}741)\right]$$

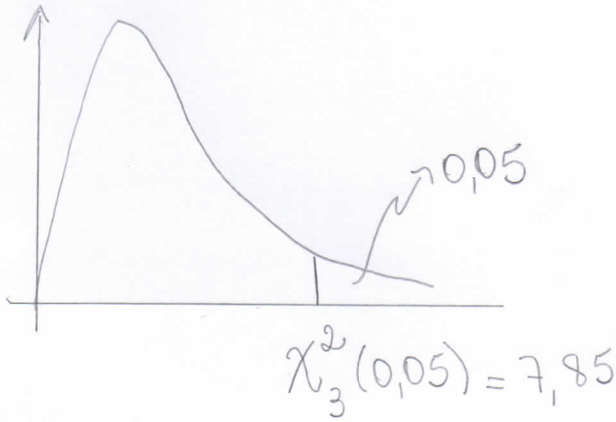
$$= 3{,}67$$

$$\nu = \frac{(k-1)\,p\,(p+1)}{2} = \frac{(2-1)\,2.3}{2} = 3$$

k = nº de populações

p = nº de variáveis

$$\chi^2_3(0{,}05) = 7{,}81$$



Não rejeitamos H_0.

Tong, Y. L. (1990) - The Multivariate Normal Distribution - Springer-Verlag, Berlin, Heldeberg and New York, 271 p.

Inferência não Paramétrica

1 - Conceitos Básicos

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ univariada

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$

<u>σ^2 conhecido</u>:

Estatística de Teste: $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Região Crítica: $|Z_{obs}| \geq z_c \quad z_c \mid P(Z \geq z_c) = \dfrac{\alpha}{2}$

$Z \sim N(0,1)$

<u>σ^2 desconhecido</u>:

Estatística de Teste: $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

Região Crítica: $|t_{obs}| \geq t_c \quad t_c \mid P(t_{n-1} \geq t_c) = \dfrac{\alpha}{2}$

$t_{n-1} \sim$ t-student $n-1$ gl.

Teste de igualdade de médias de duas pop. indep.

$X \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ $\quad Y \sim N(\mu_y, \sigma^2)$ $\quad X$ e Y v. a. indep.

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ $\quad$ am: n_1 elem. pop 1 $\Rightarrow \bar{X}$

$H_a: \mu_X \neq \mu_Y$ $\quad$ n_2 elem. pop 2 $\Rightarrow \bar{Y}$

$$s_c^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Estatística de Teste: $\quad t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

Região Crítica: $|t_{obs}| \geq t_c$ $\quad t_c: P(t \geq t_c) = \dfrac{\alpha}{2}$

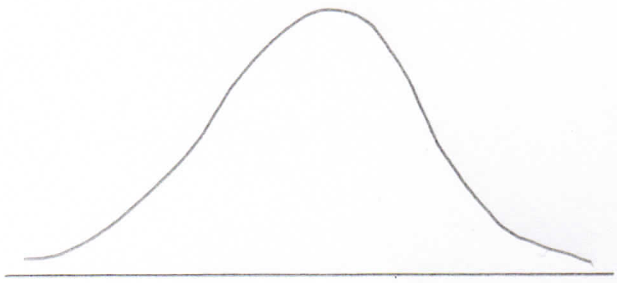
$t \sim$ t-student $n_1 + n_2 - 2$ gl

Suposições dos testes: Normalidade

$\downarrow$

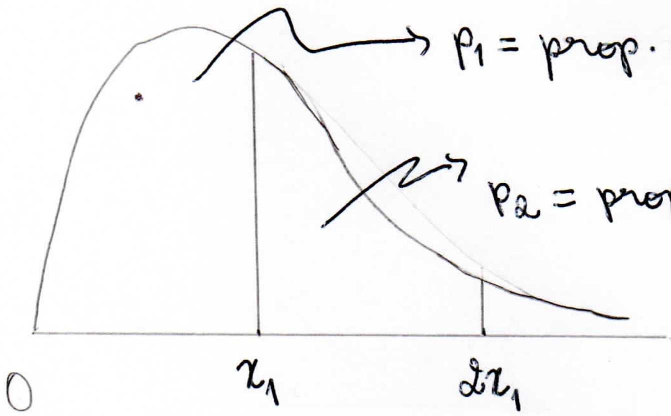
nem sempre é razoável

X - v. com dist. normal



Simetria alta concentração em valores centrais
baixa concentração nas caudas

X - renda familiar anual



p_1 = prop. de famílias com renda inferior a x_1

p_2 = prop. de famílias com renda entre x_1 e x_2

$p_1 > p_2$

Distribuição assimétrica
alta concentração de famílias com baixa renda

A suposição de normalidade (ou de qualquer outro tipo de distribuição) decorre de experiências anteriores ou da natureza dos dados. (Peso, Altura, Notas de um teste, medidas tomadas diretamente no sangue, etc.)

Neste caso, podemos aplicar a maioria dos testes e procedimentos vistos até o momento, a v. de interesse terá dist. normal com <u>parâmetros desconhecidos</u>. Problema: inferência sobre estes parâmetros.

Se a suposição de normalidade é satisfeita, estes métodos são os melhores (estimadores mais precisos, testes mais poderosos).

Quando a suposição de normalidade não é satisfeita ou não temos certeza sobre ela, podemos utilizar <u>métodos não paramétricos</u> = <u>métodos "livres de distribuição"</u>.

Ao aplicar esses métodos, não são necessárias suposições sobre a distribuição da variável de interesse, somente que a distribuição seja contínua e que a amostra seja aleatória.

A eficiência dos resultados de um procedimento paramétrico depende da validade das suposições (No caso de IC, o verdadeiro coeficiente de confiança pode ser muito diferente do pré estabelecido.

No caso de T H, as probabilidades de erro podem ser muito diferentes daquelas fixadas.

Testes paramétricos exigem medidas pelo menos em uma escala intervalar.

Testes não paramétricos podem ser usados para dados na escala ordinal e alguns para dados na escala ordinal. Por esse motivo são muito utilizados para dados das "Ciências do Comportamento" (Psicologia, Pedagogia, Ciências Sociais).

Como uma v.a. com distribuição normal é contínua, os métodos não paramétricos podem também ser aplicados neste caso, mas na presença de normalidade, existem técnicas mais refinadas.

Aplicar testes não paramétricos em situações que podemos aplicar os paramétricos é um desperdício de informação.