FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

1o. SEMESTRE DE 2021

EXERCÍCIOS

Entrega. Entregue suas soluções no e-Disciplinas. Soluções entregues fora de prazo valerão menos.

Política de colaboração e uso de fontes. Todo trabalho entregue por você deve ser seu. Você é encorajado a discutir com seus colegas o material visto em sala e os enunciados dos exercícios, mas tome cuidado para não compartilhar seu trabalho além do permitido. Nos *exercícios individuais*, você não pode compartilhar suas soluções ou mesmo ideias de soluções. Nos *exercícios em grupo*, você só pode compartilhar suas ideias e soluções com membros de seu grupo. Nos exercícios em grupo, *cada membro do grupo deve escrever uma solução própria*—esta disciplina tem como um de seus objetivos estudar como escrever matemática e portanto o processo de escrita será enfatizado, mesmo nos exercícios em grupo. Ao entregar um exercício feito em grupo, não esqueça de escrever o nome de todos os membros do grupo em sua solução.

Você não deve procurar soluções de terceiros (como de amigos ou na Web). Caso você acidentalmente encontre a solução de algum exercício em algum lugar, você deve citar esta fonte em sua solução. Caso você acidentalmente acabe colaborando com colegas na descoberta de uma solução, você deve citar esta colaboração em sua solução. Seu desempenho nesta disciplina ficará prejudicado caso você viole essas regras.

Fontes dos exercícios. Vários dos exercícios vêm de nossa bibliografia. Usamos as seguintes abreviaturas (outras abreviaturas poderão ser adicionadas posteriormente).

MH: Michael Hutchings, *Introduction to mathematical arguments*;

KH: Kevin Houston, *How to think like a mathematician*;

DJV: Daniel J. Velleman, *How to prove it*;

LLM: Eric Lehman, F. Thomson Leighton and, Albert R. Meyer, *Mathematics for Computer Science*.

Exercícios para entrega. Os exercícios para entrega estão marcados com uma data de entrega. Nesses exercícios, há também indicação se é um exercício individual ou se pode ser feito em grupo. No caso de exercícios em grupo, o número máximo de alunos por grupo está especificado.

* * * * *

Date: Versão de 2021/6/3, 7:10pm.

E1 (**KH**) Prove por indução que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

E2 (**KH**) Mostre que $2n \le 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

E3 (**KH**) Prove que $3^{2n} - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

E4 (**KH**) Prove que 17 divide $3^{4n} + 4^{3n+2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

E5 (**KH**) Mostre que $\operatorname{sen}(nx) \le n \operatorname{sen}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ and $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

E6 (**KH**) Prove o Teorema do Binômio, ou seja,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Lembre que $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)}$ para todo $0 \le r < n$.

E7 (**KH**) Mostre que $n^2 - 1$ é divisível por 8 quando n é um número natural ímpar.

E8 (**KH**) Este exercício pode ser visto como uma generalização do exercício (**E3**).

(a) Mostre que $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ em que $x \ne 1$ é um número inteiro positivo.

(b) Encontre uma fórmula para $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ e use indução para mostrar que essa fórmula é verdadeira para todo n.

E9 (**KH**) Prove que para negar a fórmula $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em que Q_i é $\forall$ or $\exists$ para $1 \le i \le n$, podemos fazer o seguinte

(a) Troque todo $\forall$ por $\exists$ e todo $\exists$ por $\forall$.

(b) Troque P pela negação de P.

E10 Seja N um inteiro positivo. O *N-ésimo número Harmônico* H_N é o número

$$\sum_{1 \le k \le N} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}. \tag{1}$$

Prove que $H_{2^n} \ge 1 + n/2$ para todo inteiro $n \ge 0$.

E11 Seja S um conjunto finito. A **função indicadora** $1_X : S \to \{0, 1\}$ de um subconjunto X de S é tal que

$$1_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X, \\ 0, & \text{se } x \notin X. \end{cases}$$

(a) Mostre que $1_A 1_B = 1_{A \cap B}$.

(b) Mostre que $1_A + 1_B = 1_{A \cup B} + 1_{A \cap B}$.

E12 Sejam $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ conjuntos. Para $x \in X$, seja $\operatorname{occ}(x)$ o número de ocorrências de x nos A_i, isto é,

$$\operatorname{occ}(x) = \sum_{1 \le k \le n} 1_{A_i}(x),$$

onde 1_{A_i} é a função indicadora de A_i $(1 \le i \le n)$. Prove que

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n = \{x \in X \colon \operatorname{occ}(x) \text{ é ímpar}\},$$

em que $X \triangle Y$ é a **diferença simétrica** entre X e Y, ou seja $X \triangle Y = X \setminus Y \cup Y \setminus X$.

E13 Neste exercício, consideramos *torneios*: o resultado de campeonatos em que todos os jogadores jogam contra todos os outros jogadores, e tais que não há empates nos jogos. Por exemplo, um torneio com $n = 4$ jogadores poderia ser tal que o jogador i venceu do jogador j se e só se o par ordenado (i, j) pertence ao conjunto

$$\{(3,1),(1,4),(4,2),(2,1),(2,3),(3,4)\}. \tag{2}$$

Note que, no torneio acima, o jogador 3 venceu do jogadores 1 e 4 e perdeu do jogador 2. Você pode achar conveniente desenhar certos diagramas para representar torneios: represente cada jogador por um ponto e se o jogador i venceu do jogador j, desenhe uma flecha de i para j. Desenhe um diagrama para representar o torneio dado acima.

Introduzimos agora uma definição: dizemos que um jogador i em um torneio é um *rei* se, para todo jogador j diferente de i, vale que i venceu de j ou i venceu de um jogador k que venceu de j. Por exemplo, no exemplo acima, o jogador 3 é um rei. Prove que todo torneio não-vazio tem um rei. [*Sugestão.* Tente fazer este exercício seriamente sem ler essa sugestão. Se não sair, leia a sugestão `:-)`. Use indução em n, o número de jogadores no torneio. Suponha que os jogadores são $1, \ldots, n$. No passo de indução, aplique a hipótese de indução duas vezes: uma vez no torneio restrito aos jogadores $1, \ldots, n-1$ e outra vez em um outro torneio com $n-1$ jogadores.]

E14 (**KH**) Seja $x_1 = 0, x_2 = 1$ e $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$. Mostre que

$$x_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3 \times 2^{n-2}}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

E15 Sejam $A_1, \ldots, A_n \subset [n]$ $(n \in \mathbb{N})$ conjuntos com $|A_i| \geq 3$ para todo i. Prove que há i, j e k com $1 \leq i < j < k \leq n$ tais que $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$.

E16 **{*Data de entrega*: 14/6/2021; exercício individual}** Seja $P(n)$ $(n \geq 2)$ a afirmação

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ com $x_i \geq 0$ para todo i, vale que

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{1/n}.$$

A afirmação $P(n)$ é conhecida como a desigualdade das médias aritmética e geométrica (desigualdade MAMG).

(*i*) Prove $P(2)$.

(*ii*) Seja $n \geq 2$. Prove que se $P(2)$ e $P(n)$ valem, então $P(2n)$ também vale.

(*iii*) Seja $n > 2$. Prove que se $P(n)$ vale, então $P(n-1)$ também vale. [*Sugestão.* Tome $x_n = (x_1 + \cdots + x_{n-1})/(n-1)$.]x

(*iv*) Conclua que $P(n)$ vale para todo $n \geq 2$.

E1 (**DJS**) Diga em palavras o significado das afirmações a seguir.

(i) $\forall x[(H(x) \wedge \forall y \neg M(x,y)) \implies U(x)]$, em que $H(x)$ significa x é um homem, $M(x,y)$ significa x é casado com y, e $U(x)$ significa x é infeliz.

(ii) $\exists z(P(z,x) \wedge S(z,y) \wedge W(y))$, em que $P(z,x)$ significa z é pai/mãe de x, $S(z,y)$ significa z e y são irmãos ou irmãs, e $W(y)$ significa y é uma mulher.

E2 (**DJS**) Quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas. O universo de discurso sé $\mathbb{N}$.

(i) $\forall x \exists y(2x - y = 0)$.

(ii) $\exists y \forall x(2x - y = 0)$.

(iii) $\forall x \exists y(x - 2y = 0)$.

(iv) $\forall x(x < 10 \implies \forall y(y < x \implies y < 9))$.

(v) $\exists y, \exists z(y + z = 100)$.

(vi) $\forall x \exists y(y > x \wedge \exists z(y + z = 100))$

E3 (**DJS**) O mesmo que o exercício **E2**, mas agora tendo $\mathbb{R}$ como universo de discurso.

E4 (**DJS**) O mesmo que o exercício **E2**, mas agora tendo $\mathbb{Z}$ como universo de discurso.

E5 (**DJS**) Negue as seguintes afirmações e depois as representa de forma positiva.

(i) Toda estudante de matemática tem um amigo que precisa de ajuda em suas tarefas.

(ii) Existem calouros que não tem colega de quarto.

(iii) Todos tem um colega de quarto que não gosta de ninguém.

(iv) $a \in C \iff b \in C$.

(v) $\forall a \in A \exists b \in B(a \in C \iff b \in C)$.

(vi) $A \cup B \subseteq C \setminus D$.

(vii) $\forall y > 0 \exists x(ax^2 + bx + c = y)$.

Dica: Considere as regras de negação para quantificadores:

- $\neg(\exists x P(x))$ é equivalente a $\forall x \neg P(x)$.
- $\neg(\forall x P(x))$ é equivalente a $\exists x \neg P(x)$.

E6 (**DJS**) As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas? $\exists! x P(x)$ e abreviatura de "*existe **um único** x tal que* $P(x)$." O universo de discurso das afirmações é $\mathbb{N}$.

(i) $\forall x(x < 7 \implies \exists a \exists b \exists c(a^2 + b^2 + c^2 = x))$.

(ii) $\exists! x((x-4)^2 = 9)$.

(iii) $\exists! x((x-4)^2 = 25)$.

(iv) $\exists x \exists y((x-4)^2 = 25 \wedge (y-4)^2 = 25)$.

E7 (**DJS**) Mostre que $\neg(\forall x P(x))$ é equivalente a $\exists x \neg P(x)$ a partir da equivalência entre $\neg(\exists x P(x))$ e $\forall x \neg P(x)$.

Dica: Use a regra da dupla negação: $\neg\neg P \iff P$.

E8 Prove que $\neg(P \implies Q)$ is equivalente a $P \implies \neg Q$.

E9 Considere a afirmação p dada abaixo:

$$p = (\forall x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R})\big(x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R})(x < z < y)\big). \tag{3}$$

(i) Determine a negação $\neg p$ de p.

(ii) Diga em palavras ("em linguagem humana") o significado de p e de $\neg p$.

(*iii*) A afirmação p é verdadeira? A afirmação $\neg p$ é verdadeira? Justifique.

E10 Considere a afirmação q dada abaixo:

$$q = (\forall x \in \mathbb{N},\, \forall y \in \mathbb{N})\big(x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N})(x < z < y)\big). \tag{4}$$

(*i*) Determine a negação $\neg q$ de q.

(*ii*) Diga em palavras ("em linguagem humana") o significado de q e de $\neg q$.

(*iii*) A afirmação q é verdadeira? A afirmação $\neg q$ é verdadeira? Justifique.

E11 (**KH**) Seja $f : X \to Y$ uma função entre dois conjuntos X e Y. Suponha que A e B são subconjuntos de X. Mostre que

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Apresente um exemplo que mostra que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ não é sempre verdade. Construa um exemplo para mostrar que essa igualdade pode ser verdadeira algumas vezes.

E12 (**LLM**) Suponha que f é uma função dos reais nos reais, em símbolos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada uma das possíveis funções f abaixo, indique se f é bijetora, ou sobrejetora mas não bijetora, ou injetora mas não bijetora, ou nem injetora ou sobrejetora.

(i) $f(x) = x + 2$

(ii) $f(x) = 2x$

(iii) $f(x) = x^2$

(iv) $f(x) = x^3$

(v) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$

(vi) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$

(vii) $f(x) = e^x$

E13 (**KH**) **{*Data de entrega*: 31/5/2021; exercício individual}** Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ um arranjo dos números $1, 2, 3, \ldots, n$. Por exemplo, se $n = 6$ podemos ter $4, 3, 6, 1, 2, 5$. Prove que se n é ímpar então

$$(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_3 - 3) \cdots (x_n - n)$$

é par.*Dica*: Considere somas.

E14 Fixe um inteiro $d \geq 1$. Sabemos que, para todo inteiro n, exitem inteiros q e r com $0 \leq r < d$ tais que $n = dq + r$. Ademais, sabemos que tais q e r são únicos. Para cada $0 \leq r < d$, seja

$$A_r = \{n \in \mathbb{Z}\colon n = dq + r \text{ onde } q \text{ e } r \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq r < d\}. \tag{5}$$

Seja $\mathcal{P} = \{A_0, \ldots, A_{d-1}\}$. Prove que $\mathcal{P}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

E15 Seja X um conjunto e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *intersectante* se, para quaisquer F e $F' \in \mathcal{F}$, temos $F \cap F' \neq \emptyset$, isto é, quaisquer dois membros de $\mathcal{F}$ tem algum elemento em comum. Suponha agora que X seja finito. Seja n a cardinalidade $|X|$ de X e suponha que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ seja tal que $|\mathcal{F}| > 2^{n-1}$. Prove que $\mathcal{F}$ não é intersectante.

E1 O professor MacSperto fez a seguinte conjectura:

> **Conjectura**. Se n é um inteiro positivo maior do que 1, então $2^n - 1$ é primo.

Mostre que a conjectura do professor MacSperto é falsa.

E2 (Primos de Mersenne) Prove that if $2^n - 1$ is prime, then n is prime.
Dica: prove o *contrapositivo* da afirmação.
[*Observação.* Os elementos do conjunto $\{2^n - 1 : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ são chamados de números de Mersenne. Os primos da forma $p = 2^n - 1$ são chamados de **primos de Mersenne**. Ainda não é sabido se há infinitos primos de Mersenne. O maior primo de Mersenne conhecido tem quase 25 milhões de dígitos.]

E3 Sejam a e b dois inteiros positivos. Prove que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ **se e somente se** existem inteiros x e y tais que

$$ax + by = 1.$$

E4 Sejam a e b dois inteiros positivos. Prove ou apresente um contraexemplo para a seguinte afirmação: $\mathrm{mdc}(a, b) = 2$ **se e somente se** existem inteiros x e y tais que

$$ax + by = 2.$$

E5 (**KH**) Construa a tabela-verdade das seguintes fórmulas:

(i) NÃO(P E Q)
(ii) NÃO(P OU Q
(iii) NÃO(P) OU NÃO(Q)
(iv) P OU NÃO(Q)
(v) NÃO(P) OU P
(vi) NÃO(P) E P
(vii) P E (Q OU R)
(viii) (P E Q) OU R
(ix) NÃO(P OU Q) E R

E6 (**KH**) Negue as seguintes afirmações.

(i) P é verdadeira OU Q é falsa.
(ii) P é falsa E Q é verdadeira.
(iii) P é verdadeira OU Q é verdadeira.
(iv) P é verdadeira E Q é verdadeira.

E7 (**KH**) Uma fórmula e chamada de **tautologia** ou de **válida** se ela é *sempre* verdadeira, não importando os valores atribuídos às suas variáveis. Mostre que P OU NÃO(P) é uma tautologia. Crie uma tatologia usando E.

E8 (**KH**) Uma **contradição** é um fórmula que é falsa para qualquer atribuição de valores às suas variáveis. Mostre que P E NÃO(P) é uma contradição. Contradições têm sido muito úteis em nossas provas e continuarão a ser.

E9 (**DJS**) Usamos XOU para representar o **ou exclusivo**. Usando apenas NÃO, E, e OUescreva uma fórmula equivalente a P XOU Q. Justifique sua resposta apresentado uma tabela verdade.

E10 (**DJS**, Leis de DeMorgan) Usando apenas NÃO e E escreva uma fórmula equivalente a NÃO(P OU Q). Usando apenas NÃO e OU escreva uma fórmula equivalente a NÃO(P E Q). Justifique suas respostas apresentado as correspondentes tabelas-verdade.

E11 (**DJS**) Quais fórmulas a seguir são equivalente?

(i) (P E Q) OU (NÃO(P) OU NÃO(Q)).
(ii) NÃO(P) OU Q).
(iii) (P OU NÃO(Q)) AND (Q OU NÃO(P)).
(iv) NÃO(P OU Q).
(v) (Q E P) OU NÃO(P).

E12 Quais fórmulas a seguir são tautologias, quais são contradições e quais não são nenhuma das duas?

(i) (P OU Q) E (NÃO(P) OU NÃO(Q)).
(ii) (P OU Q) E (NÃO(P) E NÃO(Q)).
(iii) (P OU Q) OU (NÃO(P) OU NÃO(Q)).
(iv) (P OU (Q OU NÃO(R))) OU (NÃO(P) OU R).

E13 (**DJS**) Qual o número de linhas em uma tabela-verdade de uma fórmula com n variáveis distintas?

E14 (**DJS**) Usando a primeira lei de DeMorgan e dupla negação obtenha a segunda lei de DeMorgan.

E15 Encontre uma fórmula tenha a seguinte tabela-verdade:

P	Q	???
F	**F**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**V**
V	**V**	**V**

E16 Encontre uma fórmula tenha a seguinte tabela-verdade:

P	Q	R	???
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

E17 **{*Data de entrega*: 24/5/2021; exercício individual}** Este exercício também serve para mostrar que expressões assustadores podem ser na verdade bem simples.

Seja n um inteiro positivo e $[n] = 1, 2, \ldots, n$. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ variáveis booleanas. Dado $S \subseteq [n]$, definimos as fórmulas φ_S, ψ_S e γ_S como segue:

$$\varphi_S = \bigvee_{i \in S} x_i, \qquad \psi_S = \bigvee_{i \in [n] \setminus S} \neg x_i \qquad \text{e} \qquad \gamma_S = \varphi_S \vee \psi_S. \tag{6}$$

Finalmente, seja

$$\Phi_n = \bigwedge_{S \subseteq [n]} \gamma_S. \tag{7}$$

Por exemplo, se $n = 2$ e $S = \{2\}$, temos $\gamma_S = \neg x_1 \vee x_2$. Ademais,

$$\Phi_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2). \tag{8}$$

(i) Suponha que $n = 3$ e $S = \{2, 3\}$. Diga o que é φ_S.

(ii) Diga o que é Φ_3.

(iii) Mostre que Φ_n é insatisfatível para qualquer valor de n.

[*Observação.* Você pode ficar na dúvida o que são $\varphi_\emptyset$ e $\psi_{[n]}$. Vale que $\gamma_\emptyset = \bigvee_{i\in[n]} \neg x_i$ e $\gamma_{[n]} = \bigvee_{i\in[n]} x_i$.]

E18 (**LLM**) Descreva um procedimento ou escreva um programa que receba um inteiro positivo n e exiba uma tabela com todas as possíveis atribuição de valores para n variáveis. A seguir estão exemplos de tabelas para $n = 1, n = 2$ e $n = 3$.

```
n = 1    n = 2   n = 3
V        V V     V V T
F        V F     V V F
         F V     V F T
         F F     V F F
                 F V T
                 F V F
                 F F T
                 F F F
```

E19 (**LLM**) Algumas pessoas ficam desconfortáveis com a ideia de que, a partir de uma hipótese falsa, você pode provar tudo, e em vez de ter P IMPLICA Q ser verdadeiro quando P é falso, elas e eles querem que P IMPLICA Q seja falso quando P for falso. Isso levaria P IMPLICA Q a ter a mesma tabela-verdade de qual conectivo proposicional?

E20 (**LLM**) Em círcuitos digitais há a convenção de que **V** corresponde ao valor 1 e **F** corresponde ao valor 0. A partir de variáveis a_0 e a_1 considere as seguintes definições das variáveis s_0, s_1, c_1 e c_2:

$$\begin{aligned} s_o &:= a_0 \text{ XOU } \mathbf{V} \\ c_1 &:= a_0 \text{ E } \mathbf{V} \\ s_1 &:= a_1 \text{ XOU } c_1 \\ c_2 &:= a_1 \text{ E } c_1 \end{aligned}$$

Tendo em vista a convenção em circuitos digitais:

(i) se $(a_1, a_0) = (0, 0)$ qual é o valor de (c_2, s_1, s_0)?

(ii) se $(a_1, a_0) = (0, 1)$ qual é o valor de (c_2, s_1, s_0)?

(iii) se $(a_1, a_0) = (1, 1)$ qual é o valor de (c_2, s_1, s_0)?

Em palavras, dado (a_1, a_0) você consegue dizer o que é (c_2, s_1, s_0)? Você consegue dar algum significado para essas quatro definições?

4. Semana 03/05 a 07/05

E1 Calcule a maior aproximação de $\sqrt[3]{3}$ com uma casa decimal.

E2 Prove que a média aritmética é maior ou igual que a média geométrica, ou seja

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{9}$$

para todos números reais não negativos a e b. Quando (9) vale com igualdade?

E3 Suponha que a e b são números reais e k é um inteiro não negativo.

(i) Prove que $a+b$ é um fator de $a^{2k+1}+b^{2k+1}$.

(ii) Prove que $100000000000000001 = 10^{17}+1 =$ não é primo.

(iii) Prove que $32064977213018365645815809 = 22^{19}+1$ não é primo.

E4 (**LLM**) Use o princípio da boa ordem para provar que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{10}$$

para todos os inteiros não-negativos n.

E5 (**LLM**) Use o princípio da boa ordem para provar que

$$4a^3 + 2b^3 = c^3 \tag{11}$$

não tem solução nos inteira positivos.

E6 (**LLM**) Considere m envelopes cada um contendo um valor de 1, 2, 4 ,..., ou 2^m centavos. Defina

> **Propriedade** m: Para cada número inteiro não-negativo menor que 2^{m+1} há uma seleção de envelopes cuja soma dos seus valores é exatamente esse número em centavos.

Use o princípio da boa ordem para provar que a **Propriedade** m vale para todo inteiro não-negativo m.

Dica: Considere dois casos: quando o número de centavos é menor que 2^m e quando o valor é pelo menos 2^m.

E7 (**LLM**, Frobenius coin exchange problem) Use o princípio da boa ordem para provar que todo inteiro maior ou igual a 8 pode ser escrito com a soma de inteiros não negativos múltiplos de 3 e 5.

E8 (**LLM**) **{*Data de entrega*: 17/5/2021; exercício individual}**

Em 1769 Euler conjecturou que não existiam inteiros positivos a, b, c e d tais que

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4.$$

Valores inteiros positivos a, b, c e d que satisfazem essa equação foram encontrados em 1986. Portanto, o palpite de Euler estava errado, mas demorou mais de 200 anos para mostrar esse erro.

Considere a equação de Lehman, que é similar a de Euler:

$$8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4\ . \tag{12}$$

Prove que a equação (12) de Lehman realmente não tem solução nos inteiros positivos. *Dica:* entre todas soluções de (12) escolha uma com o menor valor de a e ...

E9 (**LLM**) Use o princípio da boa ordem para provar que

$$n \geq 3^{n/3} \tag{13}$$

para todo inteiro não-negativo n.

Dica: Verifique (13) para $n \leq 4$ explicitamente.

E10 (**LLM**) Usaremos o princípio da boa ordem para provar que para tod inteiro positivo n, a soma dos primeiros n ímpares é n^2, ou seja

$$\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2. \tag{14}$$

para todo $n > 0$. Suponha por contradição que a equação (15) não vale para algum inteiro positivo n. Seja m o menor inteiro para o qual a equação (15) é falsa.

(i) Porque deve existir esse m?

(ii) Explique porque $m \geq 2$.

(iii) Explique porque (b) implica que

$$\sum_{i=1}^{m-1}(2(i-1)+1) = (m-1)^2. \tag{15}$$

(iv) Qual termo deve ser adicionado ao lado esquerdo de (15) para que obtenhamos

$$\sum_{i=1}^{m}(2(i-1)+1)?$$

(v) Conclua que (15) vale para todo inteiro positivo n.

5. Semana 26/04 a 30/04

E1 (**LLM**) **{*Data de entrega*: 10/5/2021; exercício individual}**
Para $n = 40$, o valor do polinômio $p(n) = n^2 + n + 41$ não é primo. Neste exercício você provará que **não existe** polinômio $q(n)$ tal que $q(n)$ é primo para todo $n \in \mathbb{N}$, **exceto** se $q(n)$ é um polinômio constante.
Assim, $q(n) = p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para algum primo p são os únicos polinômios geradores de primos (*prime-generating polynomials*).

(i) Seja $q(n)$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja $c := q(0)$ o termo constante de q. Assim, se $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d$ são inteiros e

$$q(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_{d-1} n^{d-1} + a_d n^d$$

então $c = a_0$.
Prove que $q(cm)$ é um multiplo de c para todo $m \in \mathbb{Z}$.

(ii) Prove que **se** q não é constante e $c > 1$, **então** existem infinitos valores de n para os quais $q(n) \in \mathbb{Z}$ não são primos.
Você pode usar o fato que **se** $q(n)$ não é polinômio constante, **então** $|q(n)|$ cresce de maneira ilimitada a medida que n cresce.

(iii) Conclua que para cada polinômio não constante q, **existe** um $n \in N$ tal que $q(n)$ não é primo. Dica: Só sobrou um caso fácil

E2 (**LLM**) Prove, **corretamente**, que **se** $1 = -1$, **então** $2 = 1$.

E3 (**LLM**)

(i) Todo número real positivo r tem duas raizes quadradas, uma positiva e outra negativa. A convenção padrão é de que $\sqrt{r}$ se refere a raiz quadrada positiva de r. Supondo familiaridade com as propriedades de multiplicação de números reais, prove que para reais positivos r e s vale que

$$\sqrt{rs} = \sqrt{r}\sqrt{s}.$$

(ii) Identifique o problema na seguinte prova *bugada*

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

E4 (**LLM**) Se elevarmos um número irracional a outro irracional podemos obter um número racional? Mostre que sim, podemos obter um racional! Considere $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $x^{\sqrt{2}}$ e faça uma análise de casos.

E5 (**LLM**) Mostre que se n é inteiro então $\log_7 n$ é inteiro ou irracional. Dica: Use o Teorema Fundamental da Aritmética que diz que todo inteiro maior que 1 pode ser escrito de maneira **única** como produto de primos.

E6 (**LLM**) Seja $n > 0$ um inteiro. Mostre que se a^n é par, então a é par. Dica: Demonstre por contradição.

E7 (**LLM**) Sejam a, b e n números reais não negativos. Prove que se $ab = n$, então a ou b deve ser menor que $\sqrt{n}$,

E8 (**LLM**) Seja n um número inteiro não-negativo. Mostre que se n^2 é multiplo de 3, então n é multiplo de 3.

E9 (**LLM**) Dê um exemplo de dois inteiros positivos m e n tais que n^2 é multiplo de m, mas n não é multiplo de m. E se exigirmos que m seja menor que n?

E10 **LLM:** Aqui está uma outra demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional copiada da *American Mathematical Monthly, v. 116, Jan. 2009, p. 69*:

Demonstração. Suponha por contradição que $\sqrt{2}$ é racional. Escolha o menor inteiro $q > 0$ tal que $(\sqrt{2}-1)q$ é um inteiro não-negativo. Seja $q' := (\sqrt{2}-1)q$. Claramente $0 < q' < q$. Entretanto uma simples computação mostra que $(\sqrt{2}-1)q'$ é um inteiro não-negativo, contradizendo a minimalidade de q. □

(i) Esta prova foi escrita para uma audiência de professores do ensino fundamental e neste ponto é mais concisa que o desejado. Escreva uma versão mais completa incluindo explicações de cada passo.

(ii) Agora que você justificou cada passado dessa prova, você tem preferência por alguma dessas provas? Por quê? Discuta essa questão com seu colegas.

E11 (**LLM**) Usando o lema a seguir, mostre que **se** k é um inteiro não-negativo e m é um inteiro positivo, **então** $\sqrt[m]{k}$ é irracional sempre que k não é da forma n^m para algum inteiro positivo n.

Lema 1. *Se os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ são inteiros, então as raízes reais do polinômio*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$$

são inteiras ou irracionais.

Um número x é **raiz** de um polinômio p se $p(x) = 0$.

E12 (**MH**) Liste separadamente os elementos e subconjuntos de $\{\{1,\{2\}\},\{3\}\}$. Há 2 elementos e 4 subconjuntos.

E13 (**MH**) Explique porque se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

E14 (**MH**) Se um conjunto tem n elementos, quantos subconjuntos ele tem? Por quê?

E15 (**MH**) Se A e B são conjuntos que não têm elementos, então $A = B$?

E16 (**MH**) Quais das seguintes afirmações é verdade e quais são falsas?

(i) $\{\{\emptyset\}\} \cup \emptyset = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(ii) $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cap \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset\}$

(iv) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cap \{\{\emptyset\}\}\} = \{\{\emptyset\}\}$

E17 Mostre que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$. É sempre verdade que $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$?

E18 A *diferença simétrica* $A \triangle B$ de dois conjuntos A e B é o conjunto $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Prove que a operação de diferença simétrica é associativa, isto é, que $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ para quaisquer conjuntos A, B e C.