4320196 – Física para Engenharia II - Prova Substitutiva - 2012

ATENÇÃO: Você fará QUATRO das questões a seguir, de acordo com a prova que foi perdida:

- **Sub da P1 ou P2:** Q1, Q2 e Q3 são OBRIGATÓRIAS. Escolha UMA entre a Q4 e Q5.

- **Sub da P3:** Questões Q1, Q4 e Q5 são OBRIGATÓRIAS. Escolha UMA entre a Q2 e a Q3.

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3\times10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \gamma(v)\,(x-vt) \\ y' &=& y \\ z' &=& z \\ t' &=& \gamma(v)\left(t-\frac{v.x}{c^2}\right) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'_x &=& \frac{u_x-v}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &=& \frac{u_{y,z}}{\gamma(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{array}\right.$$

$$\vec{p} = \gamma(u)m_0\vec{u} \qquad E = \gamma(u)m_0c^2$$

$$E = K + m_0c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\gamma_{(u)}^2 u^2 = \left(\gamma_{(u)}^2 - 1\right)c^2 \qquad m(u) = \gamma(u)m_0$$

Formulário (cont.):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ \ k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi);\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right);\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2-\Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\gamma^2\Omega^2}};\tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}; Q = \frac{\omega_0}{\gamma}; \tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

$$y(x,t) = A\ \cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$v = \frac{\omega}{k};\ \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f};\ k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}; I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2A^2; k_n = n\frac{\pi}{L}$$

$$\alpha = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)\ \ (I_0 = 10^{-12}\text{ W/m}^2\ )$$

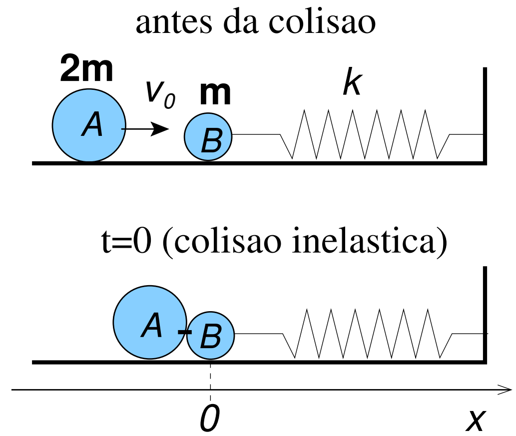
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$f = f_0\frac{\left(1\pm\frac{u}{v_s}\right)}{\left(1\mp\frac{V}{v_s}\right)}\ \left\{\begin{array}{l} u \rightarrow \text{observador} \\ V \rightarrow \text{fonte}\end{array}\right.$$

$$f = f_0\frac{\sqrt{1\mp\frac{v}{c}}}{\sqrt{1\pm\frac{v}{c}}}\ ;\ \text{sen}\ \alpha = \frac{v_s}{V}$$

Q1 - (OBRIGATÓRIA para **TODOS**) Um corpo A de massa $2m$ e velocidade inicial v_0 paralela à direção positiva de x desliza sem atrito sobre uma superfície e colide, no instante $t = 0$, com um corpo B de massa m em repouso e preso a uma mola ideal de constante elástica k, que está relaxada no momento da colisão. A outra extremidade da mola encontra-se fixa a uma parede (vide figura). A colisão (não-relativística) é completamente inelástica de modo que os corpos A e B ficam presos um ao outro após a colisão.



Nos ítens (a)-(c), expresse suas respostas em função dos dados do problema (v_0, m, k).

(a) [0,25] Calcule a velocidade do conjunto $A + B$ no instante $t = 0$ logo após a colisão.

(b) [1,0] Calcule a frequência de oscilação, amplitude e constante de fase do conjunto $A + B$ em torno da posição de equilíbrio $x(t = 0) = 0$.

(c) [0,25] Calcule a energia potencial E_p do sistema no ponto de máxima amplitude e a razão E_p/E_{k0} onde E_{k0} é a energia cinética da partícula A antes da colisão.

(d) [1,0] Considere agora que uma força de arrasto proporcional à velocidade $F_a = -12\dot{x}$ (N) atue sobre o sistema após a colisão. Sendo $v_0 = 3$ m/s, $m = 1$ kg, e $k = 12$ N/m, determine o regime de amortecimento e a solução $x(t)$ (equação horária) do movimento do conjunto $A + B$.

Solução Q1:

a) Por conservação de momento linear: $2mv_0 = (2m + m)v \Rightarrow \boxed{v = \frac{+2v_0}{3}}$

b) A 2a Lei de Newton para o conjunto $A + B$ após a colisão fica

$$(2m + m)\ddot{x}(t) = -kx(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{k}{3m}x(t)$$

A solução para a eq. diferencial é $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ onde $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{3m}}}$.

As condições iniciais são: $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = +2v_0/3$.

Logo:

$$\left\{ \begin{array}{c} A\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\pi/2 \\ -A\omega\sin\varphi = +\frac{2v_0}{3} \end{array} \right. \Rightarrow A^2 = \frac{4v_0^2}{9\omega_0^2} = \frac{4mv_0^2}{3k}$$

Logo a amplitude será $\boxed{A = 2v_0\sqrt{\frac{m}{3k}}}$. A constante de fase será $\boxed{\varphi = -\pi/2}$ pois $\sin\varphi = -1$

A solução fica: $\boxed{x(t) = 2v_0\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}t - \frac{\pi}{2}\right)}$.

c) A energia potencial do sistema massa-mola para $x(t) = \pm A$ será $E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\frac{4mv_0^2}{3k} \Rightarrow$ $\boxed{E_p = \frac{2}{3}mv_0^2}$.

A energia cinética do corpo A antes da colisão será $E_{k0} = \frac{1}{2}(2m)v_0^2 = mv_0^2$. Logo $\boxed{\frac{E_p}{E_{k0}} = \frac{2}{3}}$.

d) A 2a Lei de Newton para o conjunto $A + B$ após a colisão fica

$$(2m + m)\ddot{x}(t) = -kx(t) - 12\dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) - \gamma\dot{x}(t)$$

onde $\gamma = 12/3m$. Sendo $m = 1$ kg e $k = 12$ N/m, temos $\gamma = 4$ s^{-1} e $\omega_0 = 2$ rad/s. Logo, $\gamma/2 = \omega_0$ de modo que o regime de oscilação é **criticamente amortecido**.

A solução para a eq. diferencial é $x(t) = e^{-\gamma t/2}(a + bt)$ sendo $\dot{x}(t) = e^{-\gamma t/2}\left[-\frac{\gamma}{2}(a + bt) + b\right]$.

As condições iniciais são: $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = +2v_0/3 = +2$ m/s. Logo:

$$\begin{cases} e^0(a + b.0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ e^0.0\left[-\frac{\gamma}{2}(0 + b.0) + b\right] = +2 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{-2t}(2t) \text{ m} .$$

Q2 - (OBRIGATÓRIA para quem perdeu a **P1 ou a P2**) Um pulso, se movendo em uma corda esticada com tensão T, é descrito pela função de onda:

$$y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2} \tag{1}$$

onde b é uma constante com dimensão de comprimento.

(a) [0,5] Faça um gráfico de $y(x,0)/b$ como função de x/b.

(b) [0,75] Qual é o valor da magnitude da velocidade de propagação do pulso e sua direção?

(c) [0,75] Calcule a velocidade transversa de um dado ponto x da corda num instante t.

(d) [0,5] Determine a força vertical $F_y(x,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}$ e a potência instantânea associadas a esse pulso.

Solução Q2:

(a) Quando $t = 0$ obtemos que $y(x,0) = b^3/(b^2 + 4x^2)$. Podemos ver então que

$$\frac{y(x,0)}{b} = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{x}{b}\right)^2} \tag{2}$$

e o gráfico é mostrado na Fig. 1.

(b) Veja que podemos escrever a função de onda da seguinte forma: $y(x,t) = \frac{b^3}{b^2+4(x-ut/2)^2}$ que é basicamente uma função da variável $x - ut/2$. Como $u > 0$, fica claro que essa onda

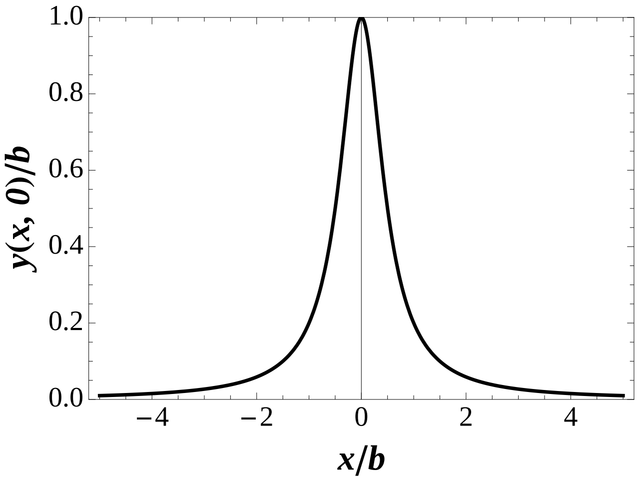


Figura 1:

está se propagando com velocidade de magnitude $u/2$ no eixo x positivo.

(c) A velocidade transversa de um ponto da corda é dado por $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$. Tomando a derivada com relação a t, obtemos

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = b^3 . \frac{\partial}{\partial t} \left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^{-1} = b^3 .(-1). \left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^{-2} .2. \left(2x - ut\right).(-u)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{2u. \left(2x - ut\right).b^3}{\left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^2}$$

Resposta também aceita:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 4y(x,t)\, \frac{u\left(x - \frac{u}{2}t\right)}{b^2 + 4\left(x - \frac{ut}{2}\right)^2} \,.$$

(d) A potência instantânea é dada por

$$P(x,t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \,.$$

Diferenciando-se em relação a x:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = b^3 . \frac{\partial}{\partial x} \left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^{-1} = b^3 .(-1). \left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^{-2} .2. \left(2x - ut\right).2$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{-4\ \left(2x - ut\right)\ b^3}{\left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^2}$$

Logo,

$$P(x,t) = +8\, u\, T\, \frac{b^6\ \left(2x - ut\right)^2}{\left(b^2 + (2x - ut)^2\right)^4} \,.$$

Resposta também aceita:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -8\,y(x,t)\,\frac{\left(x-\frac{ut}{2}\right)}{b^2+4\left(x-\frac{ut}{2}\right)^2}$$

e a potência dada por:

$$P(x,t) = 32\,T\,y(x,t)^2\,\frac{u\,\left(x-\frac{ut}{2}\right)^2}{\left[b^2+4\left(x-\frac{ut}{2}\right)^2\right]^2}\,.$$

Q3 - (OBRIGATÓRIA para quem perdeu a **P1 ou P2**) O controle ativo de ruído consiste em um sistema capaz de reduzir ruídos sonoros (sobretudo de baixa frequência), e opera no interior de algumas aeronaves e carros modernos. O aparelho funciona de acordo com o princípio de interferência destrutiva, sendo capaz de reduzir (mas não eliminar completamente!) um barulho indesejável de 80 Hz de frequência e intensidade 70 dB até o limite confortável de 50 dB. Sendo o barulho uma onda harmônica da forma $y_1(x,t) = A_1\cos(kx-\omega t)$,

(a) [0,5] informe qual deve ser o sentido de propagação e a fase δ_2 do sinal $y_2(x,t)$ gerado pelo aparelho, fornecendo as devidas justificativas.

(b) [1,0] Obtenha as funções de onda do sinal gerado pelo aparelho y_2 e do ruído atenuado $y = y_1 + y_2$ em função de A_1, k e ω. (Dica: obtenha primeiro y e depois y_2, utilizando as intensidades fornecidas.)

Considere o mesmo barulho de 80 Hz, mas agora o caso de um aparelho ligeiramente desregulado, gerando um sinal com amplitude $A_2 = A_1$ e uma frequência de 84 Hz.

(c) [0,4] No lugar da interferência destrutiva, que fenômeno ondulatório ocorre neste caso? Qual é o valor da amplitude máxima do ruído resultante?

(d) [0,6] A cada quantos segundos a amplitude máxima se repete? Justifique, fazendo um esboço do ruído resultante em função do tempo.

Solução Q3:

(a) Para que ocorra uma interferência destrutiva que atenue o barulho é necessário que o sinal tenha o mesmo sentido de propagação do barulho, com fase $\delta_2 = \pi$.

(b) De 70 dB até 50 dB houve uma redução na intensidade de 20 dB = 2 B. Portanto,

$$2\,\mathrm{B} = \log\left(\frac{I_1}{I}\right) = \log\left(\frac{A_1^2}{A^2}\right) = 2\log\left(\frac{A_1}{A}\right) \quad\Rightarrow\quad 1 = \log\left(\frac{A_1}{A}\right) \quad\Rightarrow\quad A = \frac{A_1}{10}\,.$$

Como $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\pi) = (A_1-A_2)^2$ temos que $A_2 = A_1 - A = \frac{9A_1}{10}$. Logo,

$$y(x,t) = \frac{A_1}{10}\cos(kx-\omega t) \qquad \text{e} \qquad y_2(x,t) = \frac{9A_1}{10}\cos(kx-\omega t+\pi) = -\frac{9A_1}{10}\cos(kx-\omega t)\,.$$

(c) Neste caso observa-se o fenômeno de batimentos. Sendo as amplitudes do barulho e do sinal do aparelho iguais ($A_1 = A_2$) a amplitude máxima de batimento é $A = 2A_1$.

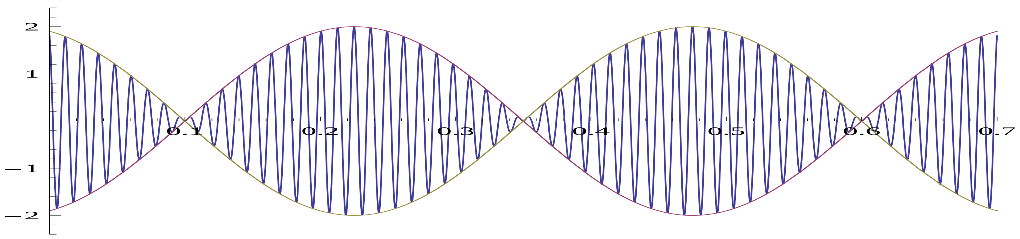
(d) A amplitude de batimento é dada por

$$A(x,t) = 2A_1 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

onde a frequência de batimento é dada por

$$f_{\text{bat}} = \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = |f_2 - f_1| = 4 \text{ Hz}\,.$$

O período de batimento é, portanto, $T_{\text{bat}} = 1/f_{\text{bat}}$=0,25 segundos. Por definição, este é o tempo entre duas amplitudes máximas de batimento (veja a figura abaixo).



Q4 - (OBRIGATÓRIA para para quem perdeu a **P3**) Uma nave de fugitivos se afasta da Terra a uma velocidade constante $v = \frac{4c}{5}$. Um ano após a fuga, uma nave militar sai em perseguição com velocidade $u = \frac{12c}{13}$.

(a) [0,5] No referêncial terrestre, quanto tempo dura a perseguição (em anos)?

(b) [0,5] Por quanto tempo os fugitivos gozaram da liberdade dentro da nave de fuga?

(c) [0,75] Os fugitivos observam a aproximação da nave militar com qual velocidade u'?

(d) [0,75] Se a nave militar foi pintanda com tinta vermelha, qual a cor aproximada da nave militar vista pela nave de fuga durante a perseguição? [Dadas as frequências da luz visível: 450 THz (vermelho), 500 THz (laranja), 600 THz (verde) e 700 THz (violeta)]

Solução Q4:

a) R: $v(t+t_0) = ut$, $t_0 = 1\,\text{ano}$ e portanto $t = [v/(u-v)]t_0 = [0,8/(\frac{12}{13} - \frac{4}{5})].1 = \frac{4}{5}\frac{5.13}{60-52} = \frac{13}{2} = 6,5\,\text{anos}$.

b) R: $\Delta t' = (t+t_0)/\gamma = \frac{15}{2}\frac{3}{5} = \frac{9}{2} = 4,5\,\text{anos}$.

c) R: $u' = (u-v)/(1-uv/c^2) = \frac{(60-52)c}{65}.\frac{1}{(1-\frac{4}{5}\frac{12}{13})} = \frac{8c}{65}\frac{65}{17} = \frac{+8c}{17}$.

d) R: (fonte vermelha se aproximando com velocidade $|u'| = 8c/17$) logo $f = \sqrt{\frac{c+|u'|}{c-|u'|}}\, f_0 = \sqrt{\frac{17+8}{17-8}}\,450 = \frac{5}{3}\,450 = 750\,\text{THz}$, portanto cor violeta (aproximadamente).

Q5 - (OBRIGATÓRIA para para quem perdeu a **P3**) Uma partícula de massa 4 GeV/c^2 e momento 3 GeV/c colide com a sua anti-partícula (de massa idêntica), que estava em repouso. Nessa colisão, a partícula incidente e a anti-partícula se aniquilam, e como resultado aparecem dois fótons (partículas de massa nula), que emergem com ângulos idênticos (θ) acima e abaixo da direção definida pelo momento da partícula incidente. Responda:

(a) [0,5] Qual a energia total da partícula incidente antes da colisão? (Expresse sua resposta em unidades de GeV.)

(b) [0,5] Qual a energia total do sistema, antes da colisão?

(c) [0,5] Vamos chamar E_1 a energia de um dos fótons (o que emerge em um ângulo θ acima da direção definida pela partícula incidente). Expresse o módulo da quantidade de movimento desse fóton em termos de E_1.

(d) [1,0] Usando conservação de energia e conservação de momento, encontre os momentos e as energias do fótons, assim como o *c*osseno do ângulo θ, $\cos\theta$.

Solução Q5:

a) Usando $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, obtemos imediatamente que $E = 5$ GeV.

b) A energia total é a energia da partícula incidente, 5 GeV, somada à energia de repouso da anti-partícula, $mc^2 = 4$ GeV, ou seja a energia total inicial é $E^i = 9$ GeV.

c) Para partículas de massa nula, $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = 0$. Portanto, $p_1 = E_1/c$.

d) Vamos definir a direção da partícula incidente como sendo x. Usando $\vec{p}^i = \vec{p}^f$, temos que:

$$p_x^i = 3\text{GeV}/c = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\theta \ .$$

Na direção y, o momento inicial é nulo, portanto:

$$0 = p_1 \text{sen}\,\theta - p_2 \text{sen}\,\theta \ .$$

Dessa segunda equação, tiramos que $p_1 = p_2$, e portanto também temos que $E_1 = E_2$.

Da conservação de energia, temos que $E^i = E^f$, e assim, usando do item (b) acima temos 9 GeV $= 2E_1 \Rightarrow E_1 = 9/2$ GeV. Daí, tiramos que os momentos dos dois fótons são (em módulo) iguais a $p_1 = p_2 = 9/2$ GeV$/c$.

Substituindo esses valores na expressão para conservação de momento na direção x, temos $2p_1 \cos\theta = 3$ GeV$/c$, de onde segue que $\cos\theta = 1/3$.