PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 10 - 12 - 2021

PTC-EPUSP

Exercício

Suponha que X_1 e X_2 sejam independentes com função densidade de probabilidade $f_{X_1}(x_1)$ e $f_{X_2}(x_2)$ respectivamente. Seja $X = X_1 + X_2$. Determine a função densidade de probabilidade de $f_X(x)$ de X.

$$F_X(v) = P(X_1 + X_2 \leq v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{v-x_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{v-x_2} f_{X_1}(x_1) dx_1 \right) f_{X_2}(x_2) dx_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(v - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2.$$

Logo,

$$f_X(v) = \frac{dF_X(v)}{dv} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(v - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2.$$

Exercício

Suponha que X_1 e X_2 sejam independentes uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1)$. Determine a função densidade de probabilidade de $X = X_1 + X_2$.

$$f_X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(v - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_0^1 1_{[0,1]}(v - x_2) dx_2$$

onde $1_{[0,1]}(u) = 1$ se $0 \leq u \leq 1$, 0 caso contrário. Logo obtém-se que (exercício)

$$f_X(v) = \begin{cases} v & 0 \leq v \leq 1 \\ 2 - v & 1 \leq v \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Trace a função distribuição de probabilidade de X.

Exercício

Suponha que X_1 e X_2 sejam independentes com distribuição de Poisson parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente, Mostre que $X = X_1 + X_2$ é Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k, X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{(n-k)} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n
\end{aligned}$$

Função Momento Gerador

Define-se a função momento gerador de uma variável aleatória X como sendo:

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_X(t) &= \frac{d\phi_X(t)}{dt} = E\left(\frac{de^{tX}}{dt}\right) = E(Xe^{tX}) \\
&\Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X), \\
\ddot{\phi}_X(t) &= \frac{d\dot{\phi}_X(t)}{dt} = \frac{dE(Xe^{tX})}{dt} = E\left(X\frac{dE(e^{tX})}{dt}\right) = E(X^2 e^{tX}) \\
&\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2).
\end{aligned}$$

Função Momento Gerador

Em geral, temos que:

$$\phi_X{}^n(0) = E(X^n)$$

onde $\phi_X{}^n(0)$ representa a n-ésima derivada de $\phi_X(t)$ em $t = 0$.

Função Momento Gerador

Seja X uma variável binomial com parâmetros (n, p). Segue que

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{(n-k)} \\
&= (1 - p + e^t p)^n
\end{aligned}$$

e portanto

$$\dot{\phi}_X(t) = n(1 - p + e^t p)^{n-1} p e^t \Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X) = np.$$

Função Momento Gerador

Temos também que

$$\ddot{\phi}_X(t) = n(n-1)(1-p+e^t p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(1-p+e^t p)^{n-1} pe^t$$
$$\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p).$$

Função Momento Gerador

Seja X uma variável exponencial com parâmetro $\lambda > 0$. Segue que (para $0 < t < \lambda$)

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$\dot{\phi}_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Temos também que

$$\ddot{\phi}_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^2}$$
$$\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Função Momento Gerador

Seja X uma variável normal com parâmetros μ e σ. Pode-se mostrar que

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$$

e portanto

$$\dot{\phi}_X(t) = (\sigma^2 t + \mu)e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} \Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X) = \mu.$$

Função Momento Gerador

Temos também que

$$\ddot{\phi}_X(t) = (\sigma^2 t + \mu)^2 e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} + \sigma^2 e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$$
$$\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

e portanto

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2.$$

Função Momento Gerador

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. Segue que

$$\phi_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Por exemplo, suponha que X e Y sejam uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1)$. Segue que

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) = \int_0^1 e^{xt} dt = \frac{1}{t} e^{xt}]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$\phi_{X+Y}(t) = \frac{(e^t - 1)^2}{t^2}.$$

Derivando segue que

$$\dot{\phi}_{X+Y}(t) = \frac{2(e^t - 1)(te^t - e^t + 1)}{t^3}$$

e portanto

$$\dot{\phi}_{X+Y}(0) = E(X + Y) = 1.$$

Função Momento Gerador

Uma propriedade importante da função momento gerador $\phi_X(t)$ é que ela define de forma única a variável aleatória X.
Sejam X e Y variáveis aleatórias de Poisson independentes com parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente. Pode-se mostrar que

$$\phi_X(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}$$

e

$$\phi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)}.$$

Segue que

$$\phi_{X+Y}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

e portanto $X+Y$ também é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda_1+\lambda_2$.

Função Momento Gerador

Sejam X e Y variáveis aleatórias normais independentes com parâmetros (μ_1, σ_1^2) e (μ_2, σ_2^2) respectivamente. Segue que

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{\left(\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t\right)} e^{\left(\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t\right)} = e^{\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2} + (\mu_1+\mu_2)t}$$

e portanto $X + Y$ também é uma variável aleatória normal com parâmetros $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right)$$

$$p_{X_2}(x_2) = P\left(X_2 = x_2\right) \qquad \{X_i = x_i\} = \{w \in \Omega; X_i(w) = x_i\}$$

Recordação

Para 2 eventos A e B lembramos que a probabilidade condicional de A dado B é:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{para } P(B) > 0.$$

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias discretas com função massa conjunta de probabilidade dada por $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ e função marginal para X_2 dada por $p_{X_2}(x_2)$. Chamando

$$A = \{X_1 = x_1\}, \quad B = \{X_2 = x_2\},$$

$AB = \{X_1 = x_1, X_2 = x_2\}$

segue que

$$P(A|B) = P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

$$p_{X_2}(x_2) = P(X_2 = x_2) > 0$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Para 2 variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2 com função massa conjunta $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, define-se a função massa condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ da seguinte forma:

$$p_{X_1|X_2}(x|x_2) = \frac{p_{X_1,X_2}(x, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

x_2 fixo
x variável

e o valor esperado condicional como

$$E(g(X_1)|X_2 = x_2) = \sum_x g(x) \frac{p_{X_1,X_2}(x, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}.$$

$$\frac{P(x_1 \le X_1 \le x_1 + \Delta x_1, x_2 \le X_2 \le x_2 + \Delta x_2)}{P(x_2 \le X_2 \le x_2 + \Delta x_2)} \simeq \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,\Delta x_1 \cancel{\Delta x_2}}{f_{X_2}(x_2)\cancel{\Delta x_2}} = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}\Delta x_1$$

$$\simeq f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)\,\Delta x_1$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Para o caso contínuo a definição é similar, suponha que 2 variáveis aleatórias contínuas X_1 e X_2 com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. Define-se a função densidade de probabilidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ da seguinte forma:

$f_{X_2}(x_2) > 0$

$$f_{X_1|X_2}(x|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

x_2 fixo, x variável

e o valor esperado condicional como

$\to f_{X_1|X_2}(x|x_2)$

$$E(g(X_1)|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{f_{X_1,X_2}(x,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}dx.$$

$$P_{X_1|X_1+X_2}(k|n) = P(X_1 = k \mid X_1+X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k, X_1+X_2 = n)}{P(X_1+X_2 = n)} =$$

$$\frac{P(X_1=k, X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{P(X_1=k)\cdot P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{\cancel{e^{-\lambda_1}}\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot\cancel{e^{-\lambda_2}}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

Exemplo

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias de Poisson com médias λ_1 e λ_2, e independentes. Calcule o $E(X_1|X_1+X_2=n)$.

$$P(X_1=k|X_1+X_2=n) = \frac{P(X_1=k, X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)}$$

$$= \frac{P(X_1=k, X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}$$

$$= \frac{P(X_1=k)P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

Binomial (n, p), $\boxed{p = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)}$

$E(X_1 | X_1 + X_2 = n) = n \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ $E(X_2 | X_1 + X_2 = n) = n \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Poisson com média $\lambda_1 + \lambda_2$ (mostre isso). Logo

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} / e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Logo $X_1|X_1+X_2$ é binomial com parâmetros n e $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$. Com isso temos que

$$E(X_1|X_1+X_2=n)=n\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(X_1=k|X_1+X_2=m)=\frac{P(X_1=k,X_1+X_2=m)}{P(X_1+X_2=m)}=\frac{P(X_1=k,X_2=m-k)}{P(X_1+X_2=m)}=$$

$$\frac{P(X_1=k)P(X_2=m-k)}{P(X_1+X_2=m)}=\frac{\binom{n}{k}\cancel{p^k}\cancel{(1-p)}^{n-k}\binom{n}{m-k}\cancel{p}^{\cancel{m-k}}\cancel{(1-p)}^{n+k-m}}{\binom{2n}{m}\cancel{p^m}(1-p)^{2n-m}}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

n tipo 1
n tipo 2
Urna

→ sorteamos m

Hipergeométrica com parâmetros $a=n$, $b=n$ e m.

Exemplo

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis binomiais identicamente distribuídas e independentes com parâmetros n e p. Para $k \leq \min\{m, n\}$ calcule $P(X_1 = k|X_1 + X_2 = m)$. Como antes,

$$\begin{aligned} P(X_1 = k|X_1 + X_2 = m) &= \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = m)}{P(X_1 + X_2 = m)} \\ &= \frac{P(X_1 = k, X_2 = m - k)}{P(X_1 + X_2 = m)} \\ &= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = m - k)}{P(X_1 + X_2 = m)} \end{aligned}$$

$$P(X_1=k \mid X_2 = m) = \frac{\dfrac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{m!}\,(n-k-m)!}\, p_1^k\, \cancel{p_2^m}\, p_3^{n-k-m}}{\dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{m!}\,(n-m)!}\, \cancel{p_2^m}\, (1-p_2)^{n-m}}$$

$1 - p_2 = p_1 + p_3$

$$= \frac{(n-m)!}{k!\,(n-m-k)!} \left(\frac{p_1}{p_1+p_3}\right)^{k} \left(1 - \frac{p_1}{p_1+p_3}\right)^{n-m-k}$$ → binomial com parâmetros $n-m$, $\frac{p_1}{p_1+p_3}$

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Binomial com parâmetros $(2n, p)$. Logo

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = m) =$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k} / \binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}$$

$$= \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} / \binom{2n}{m}$$ ✓

Distribuição hipergeométrica com parâmetros (n, n, m).

$$P(X_1 = k | X_2 = m) = P(X_1 = k, X_3 = n-k-m \mid X_2 = m) = \frac{P(X_1 = k, X_3 = n-k-m, X_2 = m)}{P(X_2 = m)}$$

$$P(X_1 = k, X_2 = m, X_3 = n-k-m) \cdot \frac{n!}{k!\,m!\,(n-k-m)!} p_1^k p_2^m p_3^{n-k-m}$$

Exemplo

Experimento pode levar a um entre 3 resultados resultados, sendo p_i a probabilidade do resultado i. n réplicas independentes desse experimento são realizadas. Seja X_i o número de vezes que o resultado i ocorre, $i = 1, 2, 3$. Calcule $P(X_1 = k|X_2 = m)$, e $E(X_1|X_2 = m)$.
Resposta: $X_1|X_2 = m$ é uma binomial com parâmetros $n - m$ e $\frac{p_1}{p_1+p_3}$.
Logo

$$P(X_1 = k|X_2 = m) =$$
$$\binom{n-m}{k} (\frac{p_1}{p_1 + p_3})^k (\frac{p_3}{p_1 + p_3})^{n-m-k}$$

Logo

$$E(X_1|X_2 = m) = (n - m)\frac{p_1}{p_1 + p_3}.$$

$E(g(X_1)|X_2) = h(X_2)$ → função da variável aleatória X_2.
→ variável aleatória.

Faz sentido calcular $E(h(X_2)) = E(E[g(X_1)]X_2))$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Podemos encarar $E(g(X_1)|X_2)$ como uma função da variável aleatória X_2 e portanto também uma variável aleatória. Da mesma forma pode-de encarar $P(X_1 \in A|X_2)$ como uma função da variável aleatória X_2 e portanto também uma variável aleatória. Tem-se o seguinte resultado importante.

$$\underline{E(g(X_1))} = \underline{E(E(g(X_1)|X_2))}$$

e

$$P(X_1 \in A) = E(P(X_1 \in A|X_2))$$

$$E[g(X_1)|X_2 = x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{f_{X_1,X_2}(x, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx \rightarrow f_{X_1|X_2}(x|x_2)$$

$$E(E[g(X_1)]X_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{f_{X_1,X_2}(x, x_2)}{\cancel{f_{X_2}(x_2)}} dx \, \cancel{f_{X_2}(x_2)} dx_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x,x_2)\, dx_2}_{f_{X_1}(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X_1}(x)\, dx = E[g(X_1)]$$

Valor Esperado Condicional

$$E(g(X_1)|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1$$

$$\begin{aligned} E(E(g(X_1)|X_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\cancel{f_{X_2}(x_2)}} dx_1 \right) \cancel{f_{X_2}(x_2)} dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 = E(g(X_1)) \end{aligned}$$

$f_{X_1}(x_1)$

$X \rightarrow$ geométrica com parâmetro p. $X \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$\rightarrow P(X = n) = (1-p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$E(X) = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} p}$ $\qquad E(X) = E(\underline{E(X|Y)})$ $\qquad \tilde{X} \to$ geométrica com parâmetro p $\to p$

$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } 1^a \text{ jogada é sucesso} \\ 0 & \text{" " " " fracasso} \end{cases}$

$E(X|Y=1) = 1$

$E(X|Y=0) = E((1+\tilde{X})) = 1+E(\tilde{X}) = 1+E(X)$ $\quad \to 1-p$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Calcule o valor esperado e a variância de uma variável aleatória geométrica com parâmetro p.

X é o número de jogadas até o 1o sucesso, e $Y = 1$ se a 1a jogada é sucesso, $Y = 0$ se for fracasso.

$$E(X|Y=1) = 1 \qquad \times p$$

$$E(X|Y=0) = 1 + E(X), \qquad \times (1-p)$$

$$E(X) = \underline{1 \times p + (1 + E(X)) \times (1-p)} \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{p}.$$

$E(X) = E(X|Y=0)P(Y=0) + E(X|Y=1)P(Y=1)$

$= (1+E(X))(1-p) + 1 \cdot p = \underbrace{1-p+p}_{1} + (1-p)E(X)$

$pE(X) = 1 \Rightarrow \boxed{E(X) = 1/p}$

$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$ $\quad$ • $E[x^2 | Y=1] = 1$

$E(x) = 1/p \quad , E[x^2] = E(E(x^2|Y))$ • $E(x^2|Y=0) = E((\underbrace{(1+\tilde{x})^2}_{1+2\tilde{x}+\tilde{x}^2})) = 1 + 2\underbrace{E(x)}_{1/p} + E(x^2)$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

- $E(X^2|Y=1) = 1$ $\quad \times p$
- $E(X^2|Y=0) = E((1+X)^2) = E((1+2X+X^2)) = 1 + \frac{2}{p} + E(X^2),$ $\quad \times(1-p)$

$$E(X^2) = 1 \times p + (1 + \frac{2}{p} + E(X^2)) \times (1-p)$$

$$\implies E(X^2) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

$$Var(X) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$E(\cancel{x^2}) = p + (1-p) + \frac{2(1-p)}{p} + (\cancel{1}-p)E(x^2)$

$pE(x^2) = 1 + \frac{2(1-p)}{p} \Rightarrow E(x^2) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}$

$$P(X\le Y) = E(P(X\le Y|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X\le Y|Y=y)\, f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X\le y|\cancel{Y=y})\, f_Y(y)\,dy \overset{X,Y}{\underset{\text{independents}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{P(X\le y)}_{F_X(y)}\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y)\,dy$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Considere X e Y independentes e contínuas com função densidade de probabilidade $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Calcule $P(X \le Y)$.

$$P(X \le Y) = E(P(X \le Y|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \le y|Y = y) f_Y(y)dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(X \le y) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y)dy.$$

$$= E(P(X\le Y|X)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X\le Y|X=x)\, f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y\ge x|\cancel{X=x})\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{P(Y\ge x)}_{1-F_Y(x)}\, f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1-F_Y(x))\, f_X(x)\,dx$$

$$\boxed{F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy = P(Y\le x)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_X e^{-\lambda_X x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad F_Y(x) = \int_0^x f_Y(y)\,dy = \int_0^x \lambda_Y e^{-\lambda_Y y}\,dy = 1 - e^{-\lambda_Y x}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_Y e^{-\lambda_Y y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \qquad 1 - F_Y(x) = e^{-\lambda_Y x} \Rightarrow P(X \le Y) = \int_0^\infty e^{-\lambda_Y x} \lambda_X e^{-\lambda_X x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda_X + \lambda_Y) e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)x}\,dx}_{= 1} = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Suponha que no exemplo anterior X e Y independentes e exponenciais com parâmetros λ_X e λ_Y. Calcule $P(X \le Y)$.

$$P(X \le Y) = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}.$$

N = número de horas até sair da mina

Calcule $E(N)$ e $Var(N)$

Porta 1	Porta 2	Porta 3
2hs e sai	3hs e volta	5hs e volta

a) Sem memória

b) Com memória

X = 1ª porta escolhida

$X \in \{1, 2, 3\}$

a) $E(N|X=1) = 2 \quad \times 1/3$

$E(N|X=2) = 3 + E(N) \quad \times 1/3$

$E(N|X=3) = 5 + E(N) \quad \times 1/3$

$\Rightarrow E(N) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{2+3+5}_{10} + 2E(N)\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{3}E(N) = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{E(N) = 10 \text{ h}}$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Um mineiro está preso em uma mina com 3 portas. A primeira leva à liberdade depois de 2 horas. A segunda volta à mina depois de 3 horas, e a terceira volta à mina depois de 5 horas. Seja N o número de horas até o mineiro sair da mina.

A) Supondo que o mineiro esquece as portas escolhidas sempre que volta à mina, calcule $E(N)$ e $Var(N)$.

B) Supondo que o mineiro lembra das portas escolhidas sempre que volta à mina, calcule $E(N)$ e $Var(N)$.

$E(N^2|X=1) = 4$

$E(N^2|X=2) = E((3+N)^2) = E(9+6N+N^2) = 9 + 6\overbrace{E(N)}^{10} + E(N^2) = 69 + E(N^2) \quad \times 1/3$

$E(N^2|X=3) = E((5+N)^2) = 25 + 10\overbrace{E(N)}^{10} + E(N^2) = 125 + E(N^2) \quad \times 1/3$

$E(N^2) = \frac{1}{3}\left(4 + 69 + 125 + 2E(N^2)\right) \Rightarrow E(N^2) = 198 \Rightarrow Var(N) = 198 - 10^2 = 98$

b) N_i = número de horas até sair escolhendo a porta i.

$E(N|X=1) = 2$

$E(N|X=2) = E((3+N_2)) = 3 + E(N_2) = 3 + 9/2$

$E(N|X=3) = E((5+N_3)) = 5 + E(N_3) = 5 + 7/2$

$E(N_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = 9/2$

$E(N_3) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 7/2$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

X - primeira porta escolhida, $X \in \{1, 2, 3\}$. Temos para o item a) que

$$E(N|X=1) = 2,$$
$$E(N|X=2) = 3 + E(N),$$
$$E(N|X=3) = 5 + E(N),$$
$$E(N) = \frac{1}{3}(2 + 3 + E(N) + 5 + E(N)) \Longrightarrow E(N) = 10.$$

$E(N) = \frac{1}{3}\left(2 + 3 + \frac{9}{2} + 5 + \frac{7}{2}\right) = 6$ hr.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$E(N^2|X=1) = 4,$$
$$E(N^2|X=2) = E((3+N)^2) = 9 + 6E(N) + E(N^2) = 69 + E(N^2),$$
$$E(N^2|X=3) = E((5+N)^2) = 25 + 10E(N) + E(N^2) = 125 + E(N^2),$$
$$E(N^2) = \frac{1}{3}(4 + 69 + E(N^2) + 125 + E(N^2)) \Longrightarrow E(N^2) = 198,$$
$$Var(N) = 198 - 10^2 = 98.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

X - primeira porta escolhida, $X \in \{1, 2, 3\}$. Temos para o item b) que

$$E(N|X=1) = 2,$$

$$E(N|X=2) = 3 + \frac{1}{2}(7+2) = \frac{15}{2},$$

$$E(N|X=3) = 5 + \frac{1}{2}(5+2) = \frac{17}{2},$$

$$E(N) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{15}{2} + \frac{17}{2}\right) \Longrightarrow E(N) = 6.$$

$$E(N^2|X=1) = 4$$

$$E(N^2|X=2) = E\left((3+N_2)^2\right) = E(9+6N_2+N_2^2) = 9 + 6\underbrace{E(N_2)}_{9/2} + \underbrace{E(N_2^2)}_{53/2}$$

$7/2$

$$E(N^2|X=3) = E\left((5+N_3)^2\right) = 25 + 10E(N_3) + E(N_3^2)$$

$$= 60 + 24/2$$

$\rightarrow E(N_2^2) = \frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}7^2 = \frac{53}{2}$, $E(N_3^2) = \frac{4}{2} + \frac{25}{2} = 29/2$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

N_i numero de horas até sair excluindo a porta i.

$$E(N^2|X=1) = 4,$$

$$E(N^2|X=2) = E((3+N_2)^2) = 9 + 6E(N_2) + E(N_2^2) = \frac{125}{2}$$

$$E(N^2|X=3) = E((5+N_3)^2) = 25 + 10E(N_3) + E(N_3^2) = \frac{149}{2},$$

$$E(N^2) = \frac{1}{3}(4 + \frac{125}{2} + \frac{149}{2}) = 47,$$

$$Var(N) = 47 - 36 = 11.$$

$E(N^2) = \frac{1}{3}\left(4 + 36 + \frac{53}{2} + 60 + \frac{29}{2}\right) = 47$

$Var(N) = 47 - 6^2 = 11$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Sejam X e Y variáveis aleatórias e para uma função $e(y)$ defina

$$H(e) = E((g(X) - e(Y))^2).$$

Deseja-se resolver o seguinte problema (problema de filtragem):

$$min_{e(.)} H(e) = min_{e(.)} E((g(X) - e(Y))^2)$$

Solução ótima e^*:

$$e^*(Y) = E(g(X)|Y).$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Defina o produto interno $< Z_1; Z_2 >= Cov(Z_1, Z_2)$. Mostre que

$$< g(X) - e^*(Y); e(Y) >= 0$$

(isto é, $g(X) - e^*(Y) \perp e(Y)$), e como isso mostre que $e^*(Y)$ é a solução ótima desejada.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$
\begin{aligned}
< g(X) - e^*(Y); e(Y) > &= E((g(X) - e^*(Y))e(Y)) \\
&= E(E((g(X) - e^*(Y))e(Y)|Y))
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
E((g(X) - e^*(Y))e(Y)|Y) &= E((g(X) - e^*(Y))|Y)e(Y) \\
&= (E(g(X)|Y) - E(e^*(Y)|Y))e(Y) \\
&= (E(g(X)|Y) - e^*(Y))e(Y) \\
&= (E(g(X)|Y) - E(g(X)|Y))e(Y) = 0.
\end{aligned}
$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Logo

$$\begin{aligned} \|g(X) - e(Y)\|^2 &= < g(X) - e(Y); g(X) - e(Y) > \\ &= < g(X) - e^*(Y) + \tilde{e}(Y); g(X) - e^*(Y) + \tilde{e}(Y) > \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{e}(Y) = e^*(Y) - e(Y)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|g(X)-e(Y)\|^2 &= \|g(X)-e^*(Y)\|^2+\|\tilde{e}(Y)\|^2\\ &\quad +2<g(X)-e^*(Y);\tilde{e}(Y)>\\ &= \|g(X)-e^*(Y)\|^2+\|\tilde{e}(Y)\|^2\end{aligned}$$

pela ortogonalidade $g(X)-e^*(Y)\perp\tilde{e}(Y)$, e como o primeiro termo não depende da função e, o mínimo é atingindo quando se faz $\tilde{e}(Y)=0$, isto é

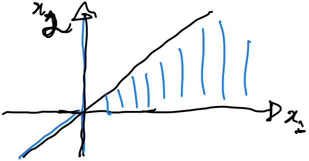
$$e(Y)=e^*(Y).$$

$$f_{X_2}(x_2)=\begin{cases}4x_2e^{-2x_2}, & x_2\geq 0\\ 0, & x_2<0\end{cases}$$

b) Calcule $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$, $\underline{x_2>0}$.

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=\frac{\cancel{4x_2}(x_1-x_2)e^{-(x_1+x_2)}}{\cancel{4x_2}e^{-2x_2}}=$$

$$=\boxed{(x_1-x_2)e^{-(x_1-x_2)} \quad x_1 > x_2}$$



a) Determine $f_{X_2}(x_2)$. $x_2 \geq 0$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{x_2}^{\infty} 4x_2(x_1-x_2)e^{-(x_1+x_2)}\,dx_1 =$$

$$e^{-x_2}x_2 \int_{x_2}^{\infty} 4x_1 e^{-x_1}\,dx_1 - e^{-x_2}x_2^2 \int_{x_2}^{\infty} 4e^{-x_1}\,dx_1$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Suponha que a função conjunta de X_1 e X_2 seja

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_2(x_1-x_2)e^{-(x_1+x_2)} & 0 < x_1 < \infty,\ 0 \leq x_2 < x_1. \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $E(X_1|X_2 = x_2)$.

$$\to \int_{x_2}^{\infty} x_1 e^{-x_1}\,dx_1 = -x_1e^{-x_1}\Big]_{x_2}^{\infty} + \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1}\,dx_1 = x_2e^{-x_2} + e^{-x_2}$$

$$\to \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1}\,dx_1 = e^{-x_2}$$

$$\int_{x_2}^{\infty} 4x_2(x_2-x_1)e^{-(x_1+x_2)}\,dx_1 = 4e^{-x_2}\left(\cancel{x_2^2e^{-x_2}} + x_2e^{-x_2} - \cancel{e^{-x_2}x_2^2}\right) = 4x_2e^{-2x_2}$$

Nota-se que

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{x_2}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1 = \int_{x_2}^{\infty} 4x_2(x_1 - x_2)e^{-(x_1+x_2)}dx_1$$
$$= 4x_2 e^{-2x_2}.$$

Obtém-se que para $x_1 > x_2$,

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{4x_2(x_1 - x_2)e^{-(x_1+x_2)}}{4x_2 e^{-2x_2}} = (x_1 - x_2)e^{-(x_1-x_2)}.$$

Portanto,

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \int_{x_2}^{\infty} x_1(x_1 - x_2)e^{-(x_1-x_2)}dx_1 = 2 + x_2.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

$$X(k) = \begin{cases} 1 & \text{se subiu no instante } k \\ 0 & \text{se desceu no instante } k \end{cases}.$$

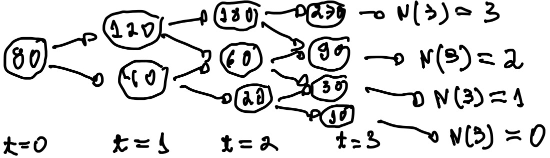
Logo $S(t) = S(t-1)u^{X(t)}d^{1-X(t)}$ e $N(t)$ é uma variável binomial com parâmetros t e p. Segue que

$$P(N(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, n = 0, \ldots, t.$$

e a probabilidade do valor do ativo é dada por

$$P(S(t) = S(0)u^n d^{t-n}) = P(N(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, n = 0, \ldots, t.$$

$u = 1{,}5$
$d = 0{,}5$



$1+r = 1{,}1$

$\underset{d}{0{,}5} < \underset{1+r}{1{,}1} < \underset{u}{1{,}5}$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Considere um ativo livre de risco com rentabilidade $1 + r$. Para não termos arbitragens devemos ter

$$u > 1 + r > d.$$

Caso isso não ocorresse poderíamos montar uma operação de arbitragem (carteira no instante $t = 0$ vale zero $V_0 = 0$ e no instante seguinte, $V_1 > 0$ com probabilidade 1).

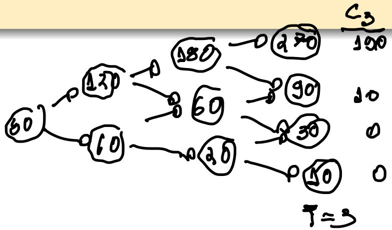
$S_0 = 80$, $u = 1{,}5$

$d = 0{,}5$

$1+r = 1{,}1$

$T = 3$

$K = 80$



$$x^+ = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Opção call (européia): é um contrato que dá ao proprietário o direito de comprar um número fixo de determinada ação a um preço fixado K em uma data específica T. Na data de vencimento, o valor C_T da opção call é:

$$C_T = \max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)^+.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Opção put (européia): é um contrato que dá ao proprietário o direito de vender um número fixo de determinada ação a um preço fixado K em uma data específica T. Na data de vencimento, o valor P_T da opção put é:

$$P_T = \max\{0, K - S_T\} = (K - S_T)^+.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

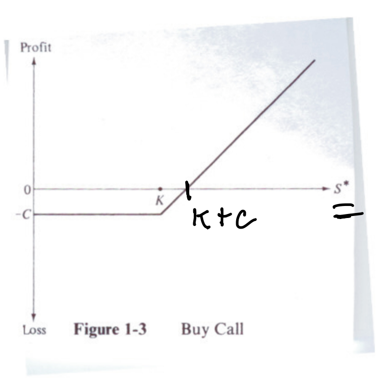


Figura: Payoff da call compra

O Modelo Binomial para Apreçamento

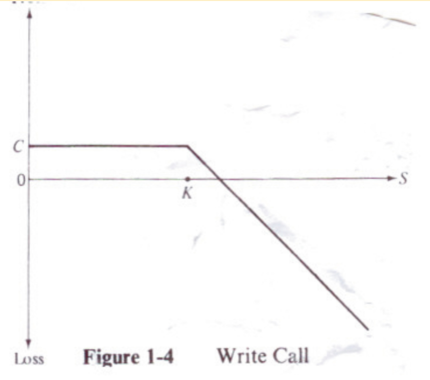


Figura: Payoff da call venda

O Modelo Binomial para Apreçamento

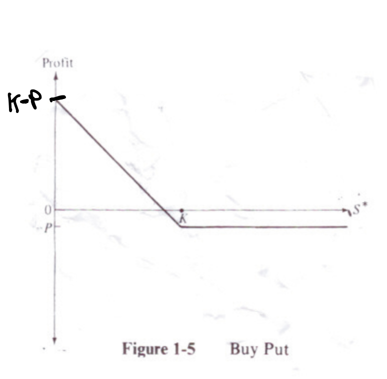


Figura: Payoff da put compra

O Modelo Binomial para Apreçamento

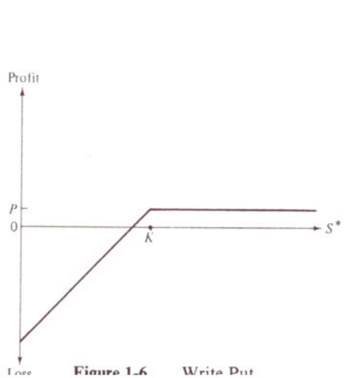


Figura: Payoff da put venda

O Modelo Binomial para Apreçamento

Como dar um valor a uma opção? Vamos considerar um modelo binomial com $T = 1$. Nesse caso o valor da opção inicial é C e no instante $\underline{T = 1}$ pode valer C_u se a ação subir, e C_d se a ação descer. Por exemplo, no caso de uma call,

$$C_u = (uS_0 - K)^+ \text{ se a ação subir}$$
$$C_d = (dS_0 - K)^+ \text{ se a ação descer.}$$

$$C_1$$

$$\begin{tikzcd}
 & uS_0 & (uS_0 - K)^+ \arrow[r, leftrightarrow] & V_u = C_u \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & dS_0 & (dS_0 - K)^+ \arrow[r, leftrightarrow] & V_d = C_d
\end{tikzcd}$$

$T=1$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Vamos montar um portfolio replicante contendo Δ unidades da ação e B do ativo livre de risco. Queremos determinar Δ e B de forma a replicar o valor da opção no instante $T = 1$. Logo em $T = 0$

$$V_0 = \underline{B} + S_0\underline{\Delta}$$

e no instante $\underline{T = 1}$

$$V_u = (1+r)B + uS_0\Delta = C_u \text{ se a ação subir}$$
$$V_d = (1+r)B + dS_0\Delta = C_d \text{ se a ação descer.}$$

$$(u-d)S_0\Delta = C_u - C_d \Rightarrow \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$$

$$(1+r)B + \left(\frac{C_u - C_d}{u-d}\right)u = C_u \Rightarrow \frac{}{(u-d)}\!\!\!\!\!\!\!\!\;\; (1+r)B = \cancel{uC_u} - dC_u - \cancel{uC_u} + C_d u$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(1+r)(u-d)}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Com isso obtemos que

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}, \\ B = \dfrac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}. \end{cases}$$

Para não termos arbitragens, devemos ter:

$$C = V_0 = B + \Delta S_0$$

$$C_0 = \frac{1}{1+r}(qC_u + (1-q)C_d),$$

exercício

$$V_0 = \underbrace{\frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}}_{B} + \underbrace{\frac{C_u - C_d}{(u-d)\cancel{S_0}}}_{\Delta} \cancel{S_0}$$

$$= \left(\frac{1}{1+r}\right)\left(q C_u + (1-q) C_d\right), \quad \boxed{q = \frac{1+r-d}{u-d}}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

onde

$$\boxed{q = \frac{1+r-d}{u-d} > 0.}$$

Importante: não depende de p.

q é conhecida como a probabilidade neutra ao risco. É a única probabilidade $\tilde{q}$ tal que

$$E_{\tilde{q}}(S_{t+1}|S_t) = \tilde{q}u\cancel{S_t} + (1-\tilde{q})d\cancel{S_t} = (1+r)\cancel{S_t}.$$

$$\tilde{q}u + (1-\tilde{q})d = (1+r)$$

$$\tilde{q}(u-d) + d = 1+r \Rightarrow \boxed{\tilde{q} = \frac{1+r-d}{u-d}}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

A fórmula acima nos diz que

$$C = \frac{1}{1+r} E_q(C_1)$$

$T = 1$

Isso sugere que em geral devemos ter

$$C = \frac{1}{(1+r)^T} E_q(C_T).$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

No caso de uma call, $\underline{C_T = (S_T - K)^+}$, com

$$S_T = S_0 u^{N(T)} d^{T-N(T)},$$

$$P(N(T) = n) = \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}, n = 0, \ldots, T.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Logo,

$$C = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{n=0}^{T} (S_0 u^n d^{T-n} - K)^+ \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Temos que

$$S_0 u^n d^{T-n} > K \Leftrightarrow ln(S_0 d^T) + n\, ln(\frac{u}{d}) > ln(K) \Leftrightarrow n > \frac{ln(\frac{K}{S_0 d^T})}{ln(\frac{u}{d})}.$$

Seja

$$\hat{n} = min\{n \in \{0, \dots, T\}; n > \frac{ln(\frac{K}{S_0 d^T})}{ln(\frac{u}{d})}\}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Temos que

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{n=\hat{n}}^{T} (S_0 u^n d^{T-n} - K)^+ \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \\
&= S_0 \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} \left(\frac{uq}{1+r}\right)^n \left(\frac{(1-q)d}{1+r}\right)^{T-n} \\
&- \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \\
&= S_0 \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} \hat{q}^n (1-\hat{q})^{T-n} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n},
\end{aligned}
$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

onde

$$\hat{q} = \frac{uq}{1+r}.$$

Note que

$$1 - \hat{q} = 1 - \frac{uq}{1+r} = \frac{1+r-uq}{1+r} = \frac{1+r-u\frac{1+r-d}{u-d}}{1+r}$$
$$= \frac{(1+r)(u-d) - u(1+r-d)}{(1+r)(u-d)} = \frac{d(u-(1+r))}{(1+r)(u-d)} = \frac{(1-q)d}{1+r}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

A fórmula de apreçamento binomial de uma opção call é:

$$C = S_0 \Phi(\hat{n}, T, \hat{q}) - \frac{K}{(1+r)^T} \Phi(\hat{n}, T, q).$$

onde

$$q = \frac{1+r-d}{u-d},$$

$$\hat{q} = \frac{uq}{1+r},$$

$$\hat{n} = min\{n \in \{0, \ldots, T\}; n > \frac{ln(\frac{K}{S_0 d^T})}{ln(\frac{u}{d})}\},$$

e

$$\Phi(i, t, \ell) = \sum_{n=i}^{t} \binom{t}{n} \ell^n (1-\ell)^{t-n}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Considere o seguinte exemplo: $S_0 = 80$, $T = 3$, $K = 80$, $u = 1,5$, $d = 0,5$, $r = 0,1$. Segue que

$$q = 0,6$$

e o valor da opção call em $t = 0$ deve ser

$$C = \cancel{34,065}.$$

34,079647

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1,1-0,5}{1,5-0,5} = 0,6 = \frac{3}{5}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

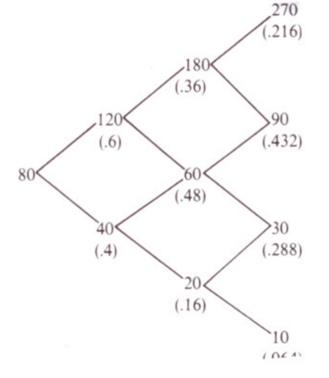
$u = 1{,}5$

$d = 0{,}5$

$1 + r = 1{,}1$

$K = 80$

$C_3 = (S_3 - 80)^+$



C_3

$190 \rightarrow N(3) = 3$

$10 \rightarrow N(3) = 2$

$0 \rightarrow N(3) = 1$

$0 \rightarrow N(3) = 0$

Figura: Evolução do Valor da Ação

O Modelo Binomial para Apreçamento

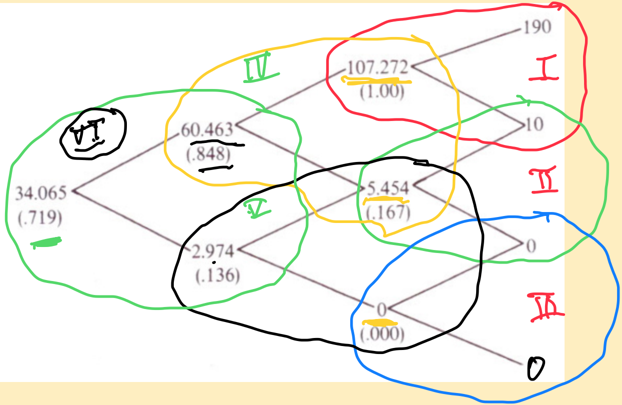


Figura: Valor da Opção Call

$$C_0 = \left(\frac{1}{1,1}\right)^3 \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot 190 + 3\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot 10 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1,1}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\cdot 190 + 3\cdot\frac{2}{5}\cdot 10\right) = \left(\frac{1}{1,1}\right)^3 \cdot \frac{2}{25}\cdot 126 = 34,0796$$

I

180 → 270, $C_u = 190$

180 → 90, $C_d = 10$

$$\Delta = \frac{190 - 10}{180} = 1 \qquad \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$$

$$B = \frac{1,5\cdot 10 - 0,5\, 190}{1,1} = -72,723 \qquad B = \frac{u\,C_d - d\,C_u}{(u-d)(1+r)}$$

$$V_I = -72,723 + 180 = 107,277$$

II

60 → 90, $C_u = 10$

60 → 30, $C_d = 0$

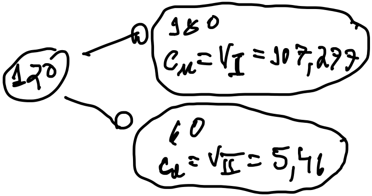
$$\Delta = 1/6$$

$$B = \frac{1,5\cdot 0 - 0,5\cdot 10}{1,1} = -\frac{5}{1,1} = -4,54$$

$$V_{II} = -\frac{5}{11} + 10 = 5,46$$

III $\quad V_{III} = 0$

IV

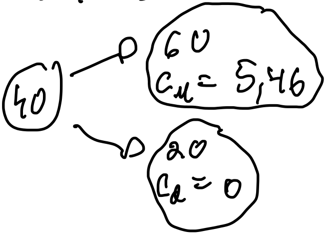


$$\Delta \simeq \frac{107,270 - 5,46}{120} = 0,848$$

$$B = \frac{1,5 \cdot 5,46 - 0,5 \cdot 107,270}{1,1} = -41,397$$

$$V_{IV} = -41,397 + 101,76$$
$$= 60,443$$

V



$$\Delta = 0,1365 \leftarrow$$

$$B = -2,48$$

$$V_V = -2,48 + 0,1365 \cdot 40$$
$$= 2,978$$

II

80

120

$C_u = 60,49$

40

$C_d = 1,978$

$\Delta \approx 0,7189$

$B = -23,43$

$V_0 \cong 34,0794$