NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 3 - Introdução aos limites

Nesta aula, iremos apresentaremos o conceito de limites infinitos.

Serão trabalhados os seguintes tópicos nesta aula:

1. O conceito de limite infinito estudado de uma forma intuitiva
2. O conceito de limite infinito estudado formalmente.
3. Exemplos numéricos.

Apresentação

No tópico anterior foi feito apresentado o conceito de limites no infinito, daremos continuidade ao que foi iniciado na aula passada.

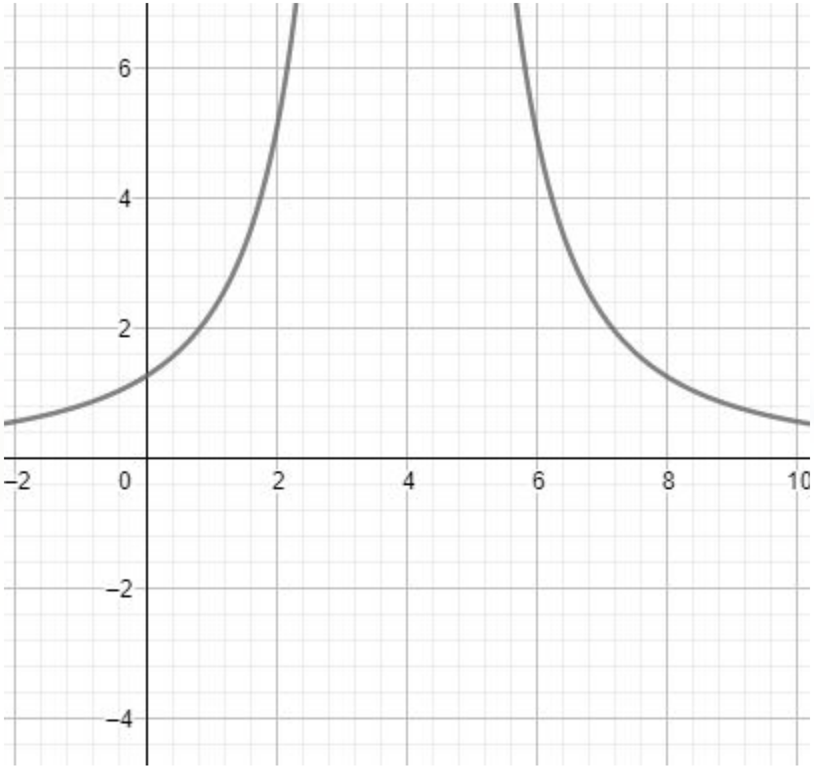
Considere a seguinte função:

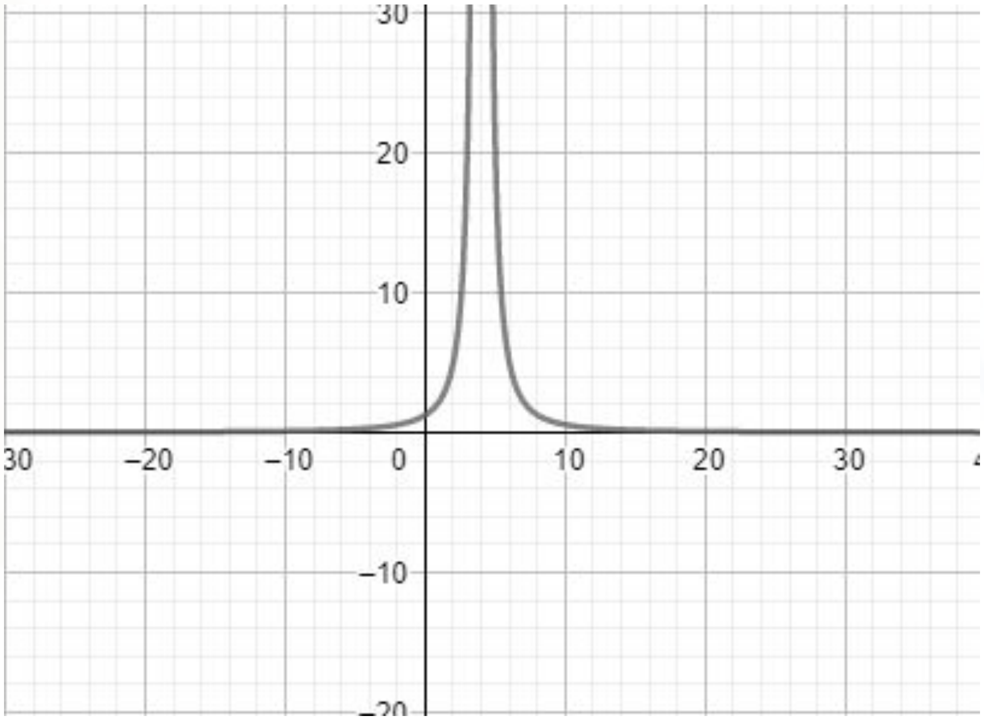
$$f(t) = \frac{20}{(t-4)^2}$$

Observe que esta função tem Dom(f) = $\mathbb{R}$-{4}. Vamos observar o comportamento desta função na proximidades de t=4. Para isso, iremos utilizar uma tabela.

t	f(t)=20/(t - 4)^2
3,000	20,000
3,500	80,000
3,550	98,765
3,600	125,000
3,650	163,265
3,700	222,222
3,750	320,000
3,800	500,000
3,850	888,889
3,900	2000,000
3,950	8000,000
3,960	12500,000
3,970	22222,222
3,980	50000,000
3,990	200000,000

t	f(t)=20/(t - 4)^2
4,010	200000,000
4,020	50000,000
4,030	22222,222
4,040	12500,000
4,050	8000,000
4,100	2000,000
4,150	888,889
4,200	500,000
4,250	320,000
4,300	222,222
4,350	163,265
4,400	125,000
4,450	98,765
4,500	80,000
5,000	20,000


6
4
2
−2
−4
−2
0
2
4
6
8
10


30
20
10
−10
−20
30
−20
−10
0
10
20
30

Considere a seguinte função:

$$f(t) = \frac{20}{t^2 - 4}$$

Observe que esta função tem Dom(f) = $\mathbb{R}$-{-2,+2}. Vamos observar o comportamento desta função na proximidades de -2 e +2. Para isso, iremos utilizar uma tabela.

Profª. Felipe Rocha Felix

t	f(t)=20/(t^2 - 4)
-11	0,171
-10	0,208
-9	0,260
-8	0,333
-7	0,444
-6	0,625
-5,000	0,952
-4,500	1,231
-4,000	1,667
-3,500	2,424
-3,000	4,000
-2,500	8,889
-1,500	-11,429
-1,000	-6,667
-0,500	-5,333

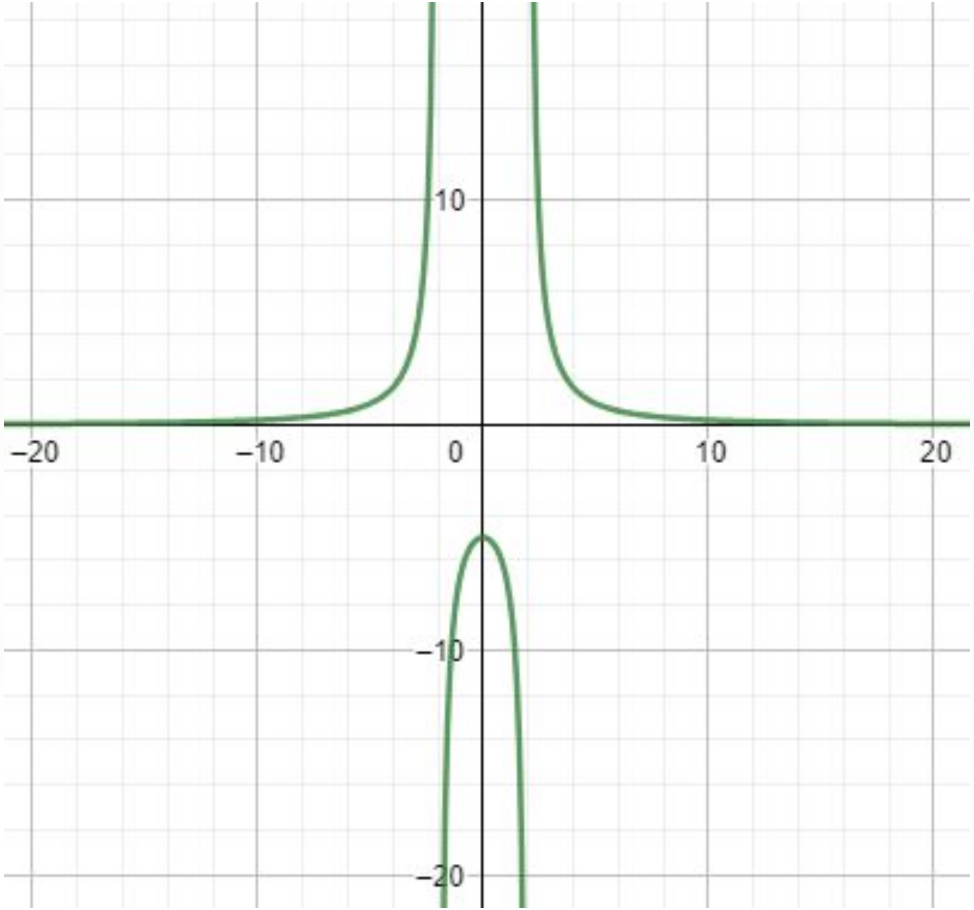
t	f(t)=20/(t^2 - 4)
0,000	-5,000
0,500	-5,333
1,000	-6,667
1,500	-11,429
2,500	8,889
3,000	4,000
3,500	2,424
4,000	1,667
4,500	1,231
5,000	0,952
6,000	0,625
7,000	0,444
8,000	0,333
9,000	0,260
10,000	0,208

t	f(t)=20/(t^2 - 4)
-2,500	8,889
-2,400	11,364
-2,300	15,504
-2,200	23,810
-2,100	48,780
-2,050	98,765
-2,040	123,762
-2,030	165,426
-2,020	248,756
-2,010	498,753
-2,005	998,752
-2,004	1248,751
-2,003	1665,418
-2,002	2498,751
-2,001	4998,750

t	f(t)=20/(t^2 - 4)
-1,999	-5001,250
-1,998	-2501,251
-1,997	-1667,918
-1,996	-1251,251
-1,995	-1001,252
-1,990	-501,253
-1,980	-251,256
-1,970	-167,926
-1,960	-126,263
-1,950	-101,266
-1,900	-51,282
-1,800	-26,316
-1,700	-18,018
-1,600	-13,889
-1,500	-11,429

t	f(t)=20/(t^2 - 4)
2,500	8,889
2,400	11,364
2,300	15,504
2,200	23,810
2,100	48,780
2,050	98,765
2,040	123,762
2,030	165,426
2,020	248,756
2,010	498,753
2,005	998,752
2,004	1248,751
2,003	1665,418
2,002	2498,751
2,001	4998,750

t	f(t)=20/(t^2 - 4)
1,999	-5001,250
1,998	-2501,251
1,997	-1667,918
1,996	-1251,251
1,995	-1001,252
1,990	-501,253
1,980	-251,256
1,970	-167,926
1,960	-126,263
1,950	-101,266
1,900	-51,282
1,800	-26,316
1,700	-18,018
1,600	-13,889
1,500	-11,429


10
−20
−10
0
10
20
−10
−20

Definição formal de limite infinito

Seja f uma função definida num domínio D, que pode ser um intervalo ou uma reunião de intervalos. Seja a um ponto que não pertence necessariamente a D, mas tal que nas proximidades de a existam pontos de D; em outras palavras, qualquer intervalo aberto que contém a intersecta D de forma não vazia.

Definição formal de limite infinito

1. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, quando para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$, se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$.

2. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, quando para todo $B > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < -B$, se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Propriedades:

Sejam $f(x)$ *e* $g(x)$ *funções tais que* $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. *Então*

1. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *se* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ *para valores de* x *próximos de* a.

2. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ *se* $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ *para valores de* x *próximos de* a.

Exemplos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 5}{(x-2)^2}$$

Profª. Felipe Rocha Felix

Observação importante:

Também podemos definir os seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Deixaremos ao leitor como definir estes limites. Daremos alguns exemplos para contextualizar.

Exemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^6 = +\infty$$

Propriedade:

Para funções racionais, temos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & se \quad n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & se \quad n = m \\ 0 & se \quad n < m \end{cases}.$$

onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + a_0$ *e* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots.. + b_0$ *são polinômios de coeficientes reais de graus* n *e* m*, respectivamente, isto é* $a_n \neq 0$ *e* $b_m \neq 0$.

Exemplos:

[1] $\lim_{x \to +\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1)$. Como $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = 1$; temos,

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^5 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty.$$

[2] $\lim_{x \to -\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1)$. Como $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = 1$; temos,

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^5 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty.$$

[3] $\lim_{x \to -\infty} (x^6 + x^3 + 1)$. Como $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right) = 1$; temos,

$$\lim_{x \to -\infty} (x^6 + x^3 + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^6 \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty.$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP