Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 2 - Introdução aos limites

Profª. Felipe Rocha Felix

Nesta aula, iremos apresentaremos o conceito de limites no infinito.

Serão trabalhados os seguintes tópicos nesta aula:

1. O conceito de limite no infinito estudado de uma forma intuitiva.
2. O conceito de limite no infinito estudado formalmente.
3. Exemplos numéricos.

Apresentação

No tópico anterior foi feito uma introdução ao conceito de limite de uma função, daremos continuidade ao que foi iniciado na aula passada.

Começaremos a aula com o seguinte problema:

1. Uma montadora de computadores determina que um empregado após t dias de treinamento, monta *m* computadores por dia, onde:

$$m(t) = \frac{20t^2}{t^2+t+5}$$

Qual é o comportamento de m = m(t) para treinamentos longos?

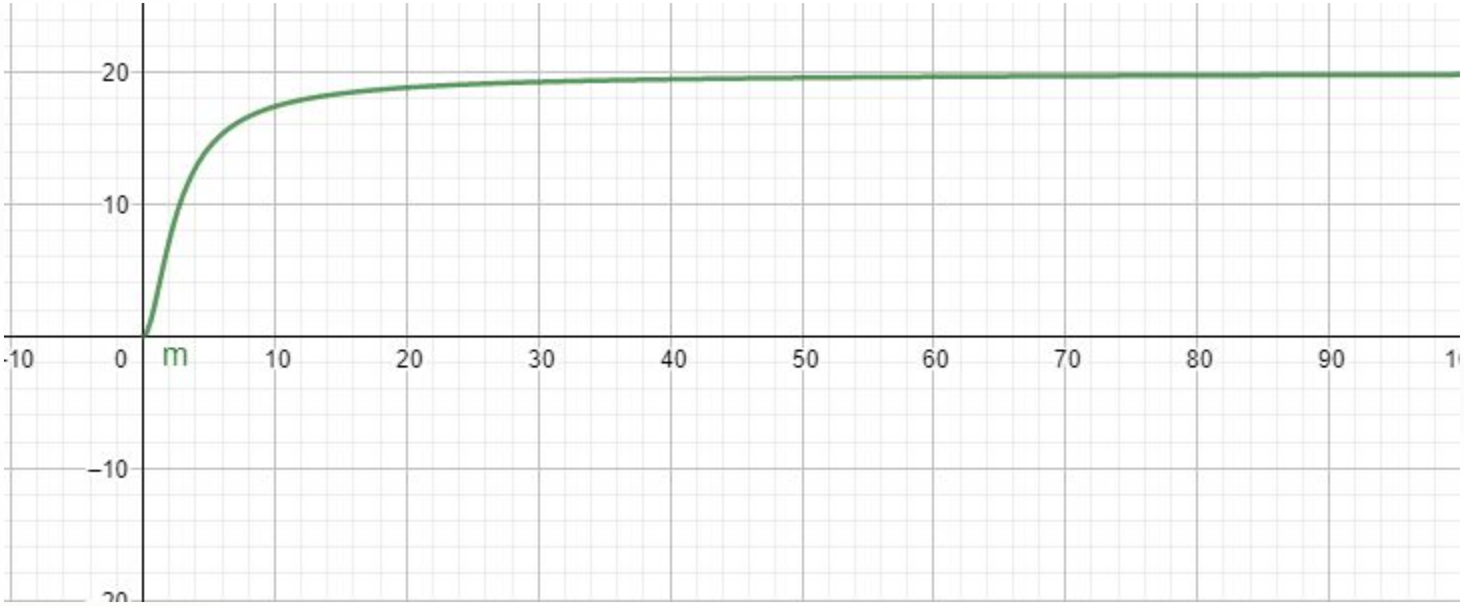


Gráfico da função m(t)

t (em dias)	m(t) = número de computadores montados	t (em dias)	m(t) = número de computadores montados
0	0,00	70	19,70
1	2,86	80	19,74
2	7,27	90	19,77
3	10,59	100	19,79
4	12,80	150	19,86
5	14,29	200	19,90
10	17,39	300	19,93
20	18,82	400	19,95
30	19,25	500	19,96
40	19,45	1000	19,98
50	19,57	2000	19,99
60	19,65	3000	19,99

Para resolvermos os problemas apresentados iremos fazer uma breve introdução teórica.

Como pode ser visto no problema da linha de montagem o gráfico ele estabiliza em um valor (20 computadores). Ou seja, para tempo suficientemente grande a quantidade de computadores montados atinge um número.

Dizemos que f (x) possui limite L quando x tende ao infinito quando os valores f(x) se estabilizam em L à medida que x se distancia da origem, ou seja, à medida que x assume valores muito grandes. Em casos como esse,escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

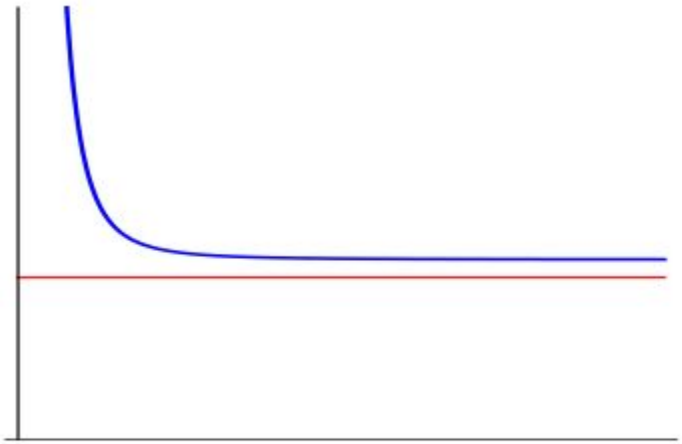
Profª. Felipe Rocha Felix

Dizemos que y = f (x) possui limite L quando x tende a menos infinito quando os valores f (x) se estabilizam em L à medida que x se distancia da origem à sua esquerda, ou seja, quando x assume valores negativos com valor absoluto muito grande. Para esses, escrevemos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Dizemos que y = L é uma assíntota horizontal da função y = f (x) quando:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$



Tracejado vermelho é a assíntota horizontal.

Definição formal de limite no infinito

1. *Seja* $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Diz-se que:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

quando para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $A > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *se* $x > A$.

2. *Seja* $f : (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Diz-se que:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quando para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $B > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *se* $x < -B$.

Profª. Felipe Rocha Felix

Propriedades:

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *e* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ *existem, então, para todo* $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$:

1. $$\lim_{x\to\pm\infty}\Big[\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)\Big]=\alpha\lim_{x\to\pm\infty} f(x)+\beta\lim_{x\to\pm\infty} g(x),$$

2. $$\lim_{x\to\pm\infty}\Big[f(x)\, g(x)\Big]=\Big[\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\Big]\Big[\lim_{x\to\pm\infty} g(x)\Big],$$

3. $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)},\ \textit{se}\ \lim_{x\to\pm\infty} g(x)\neq 0.$$

Profª. Felipe Rocha Felix

Exemplo:

$$\text{Calcule :} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x^3} + 5 \right)$$

Aplicando diretamente a propriedade 1, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x^3} + 5 \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x^3} \right) + \lim_{x \to +\infty} 5 = 0 + 5 = 5.$$

Propriedade importante:

Seja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots.. + a_0$ *e* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots.. + b_0$ *são polinômios de coeficientes reais de graus* n *e* m*, respectivamente, isto é* $a_n \neq 0$ *e* $b_m \neq 0$*. Então:*

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & se \quad n = m \\ 0 & se \quad n < m \end{cases}}$$

Exemplo 1:

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 5x^3 + x + 2}$.

Exemplo 2:

Calcule $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2}$.

Exemplo 3:

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 5}}$.

Exemplo 4:

Calcule $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}$.

Profª. Felipe Rocha Felix

Retomando ao problema proposto no início da aula.

1. Uma montadora de computadores determina que um empregado após t dias de treinamento, monta *m* computadores por dia, onde:

$$m(t) = \frac{20t^2}{t^2+t+5}$$

Qual é o comportamento de m = m(t) para treinamentos longos?

$$m(t) = \frac{20t^2}{t^2+t+5}$$

Profª. Felipe Rocha Felix

Faça você mesmo

1. O custo para produzir x unidades de um certo produto é dado por

$C(x) = 0{,}25\,x + 3600$ em reais.

(a) Determine o custo médio quando x cresce.

(b) Interprete o resultado

Faça você mesmo

2. Modelou-se a evolução da população de uma certa cidade, após t anos, a partir de 2009 por:

$$E(t) = 20000 + \frac{15000\,t}{t^2 + 2\,t + 10}.$$

Qual é o comportamento a longo prazo?

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP