NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 1 - Introdução aos limites

Nesta aula, iremos introduzir o conceito de limite de função.

Profª. Felipe Rocha Felix

Serão trabalhados os seguintes tópicos nesta aula:

1. O conceito de limite estudado de uma forma intuitiva.
2. O conceito de limite estudado formalmente.
3. Exemplos numéricos.
4. O conceito de limite lateral estudado de uma forma intuitiva
5. O conceito de limite lateral estudado formalmente.
6. Exemplos numéricos.

Profª. Felipe Rocha Felix

Apresentação

No último tópico foi feito uma introdução sobre o comportamento de funções reais, foi estudado como as funções reais se comportam “globalmente”.

Neste tópico daremos continuidade sobre o que foi estudado anteriormente, porém, de um ponto de vista “local”, ou seja, “perto” de um ponto.

Inicialmente apresentaremos a idéia intuitiva de limite, estudando o comportamento de uma função y = f(x) nas proximidades de um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio[1].

1. O domínio de uma função é o conjunto de todos os $x \in R$ que satisfazem a definição de função.

A função de produção P(x) de um certo bem em relação à quantidade de matéria prima, em quilogramas, é dada por:

$$P(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Determine e interprete a produção quando se tem 2 quilogramas de matéria prima.

Por exemplo, seja a seguinte função:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$

Observe que esta função tem domínio o conjunto dos números reais exceto o número 1. Simbolicamente

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Como a função anterior tem restrições no ponto x=1, faremos uma abordagem “próxima ao ponto”, ou seja, quando x<1 e x>1. Podemos simplificar a função anterior e reescrevê-la da seguinte forma:

$$f(x) = 2x + 1$$

quando x diferente 1.

Atenção

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = 2x + 1$$

A igualdade só é válida nos pontos em que x é diferente de 1.

Apresentaremos duas tabelas em que colocamos pontos $x<1$ e $x>1$ e suas respectivas imagens:

x<1	f(x)=2x+1
0	1
0,5	2
0,7	2,4
0,8	2,6
0,9	2,8
0,99	2,98
0,999	2,998
0,9999	2,9998
0,99999	2,99998
0,999999	2,999998
0,9999999	2,9999998
0,99999999	2,99999998

x>1	f(x)=2x+1
2	5
1,7	4,4
1,5	4
1,2	3,4
1,09	3,18
1,009	3,018
1,0009	3,0018
1,00009	3,00018
1,000009	3,000018
1,0000009	3,0000018
1,00000009	3,00000018
1,000000009	3,000000018

Conclusão sobre a tabela:

A função f se aproxima de 3 quando x tende para 1, ou seja, f (x) fica arbitrariamente próximo de 3 para x suficientemente próximo de 1 .

Profª. Felipe Rocha Felix

Faça você mesmo

Construa uma planilha e observe o comportamento da função:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Quando x se aproxima de x=1 (porém, x diferente de 1).

- Use as propriedades de fatoração e estude a função quando x se aproxima de 1.

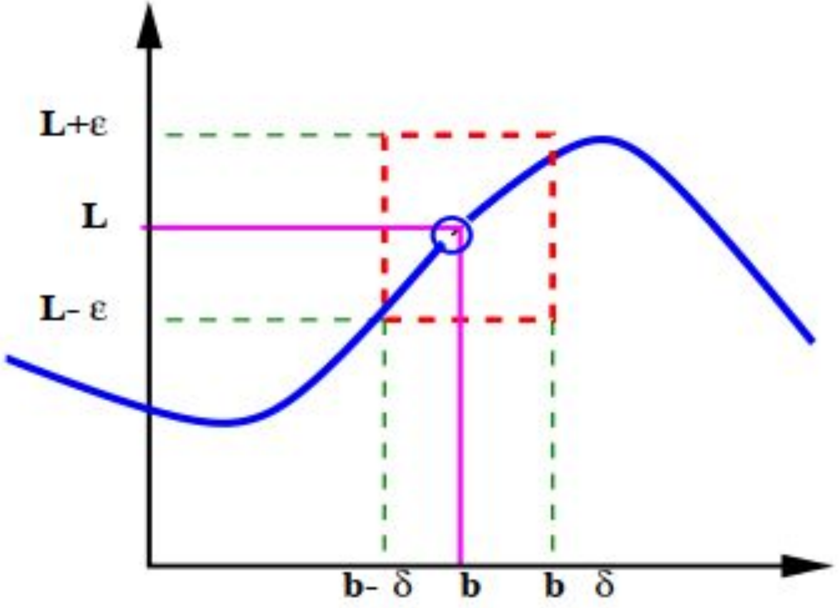
Planilha gabarito:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1Ud8xw3eCaocwx15MvbUE36FTeesJHNplIeqxP2TakD4/edit?usp=sharing

A ideia intuitiva sobre limite.

Uma função f tem limite L quando x tende para a quando f (x) fica arbitrariamente próximo de L para x suficientemente próximo de b .

A ideia geométrica sobre limite.



Profª. Felipe Rocha Felix

Definição formal de limite

Definição: Sejam f : A → R uma função e b ∈ R tais que para todo intervalo aberto I, contendo b, tem-se I \ (A - {b}) ≠ ∅. O número real L é o limite de f(x) quando x aproxima-se de b quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 ; 0 < |x - b| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notação para limite

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

Propriedade "simplifica":

Se as funções $f(x)$ *e* $g(x)$ *são tais que* $f(x) = g(x)$ *exceto num ponto* b*, então:*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x),$$

Desde que um dos limites exista.

Profª. Felipe Rocha Felix

Propriedades importantes:

Unicidade do limite:

$$Se \lim_{x \to b} f(x) = L_1 \; e \; \lim_{x \to b} f(x) = L_2; \; (L_1, L_2 \in \mathbb{R}), \; então$$

$$L_1 = L_2.$$

Profª. Felipe Rocha Felix

Exemplo:

Considere as funções:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$g(x) = 2x + 1$$

O limite de f(x) e de g(x), quando x se aproxima de 1 (porém, diferente de 1) é igual a 3.

Profª. Felipe Rocha Felix

Mais propriedades importantes:

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então para todos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{x\to a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x).$

2. $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]\,[\lim_{x\to a} g(x)].$

3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *se* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$, *se* $n \in \mathbb{N}.$

Mais propriedades importantes:

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem, então para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

5. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, *se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ *e* n *é qualquer natural, ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *positivo, negativo ou nulo e* n *é um natural ímpar.*

6. $\lim\limits_{x \to a} ln[f(x)] = ln[\lim\limits_{x \to a} f(x)]$, *se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0.$

7. *Se* $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ *e existe* $\delta > 0$ *tal que* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, *para* $0 < |x - a| < \delta$, *então* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Consequência das propriedades anteriores:

(a) Se $P(x)$ é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

(b) Se $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função racional e $a \in Dom(f)$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Faremos agora alguns exemplos numéricos para melhorar a compreensão da teoria:

Exemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 2x + 3$

Profª. Felipe Rocha Felix

$$2.\ \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^4-9}$$

$$3.\ \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

$$4. \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$$

$$5.\ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

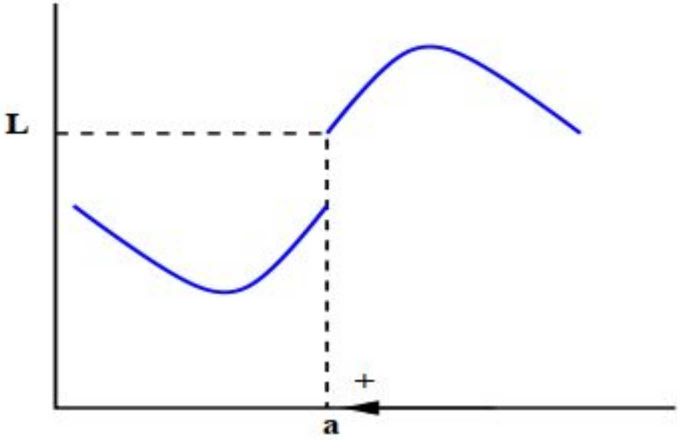
Voltando ao problema da função P(x) apresentada no início da aula.

$$P(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Limites laterais:

x>1	f(x)=2x+1
2	5
1,7	4,4
1,5	4
1,2	3,4
1,09	3,18
1,009	3,018
1,0009	3,0018
1,00009	3,00018
1,000009	3,000018
1,0000009	3,0000018
1,000000009	3,000000018
1,0000000009	3,0000000018

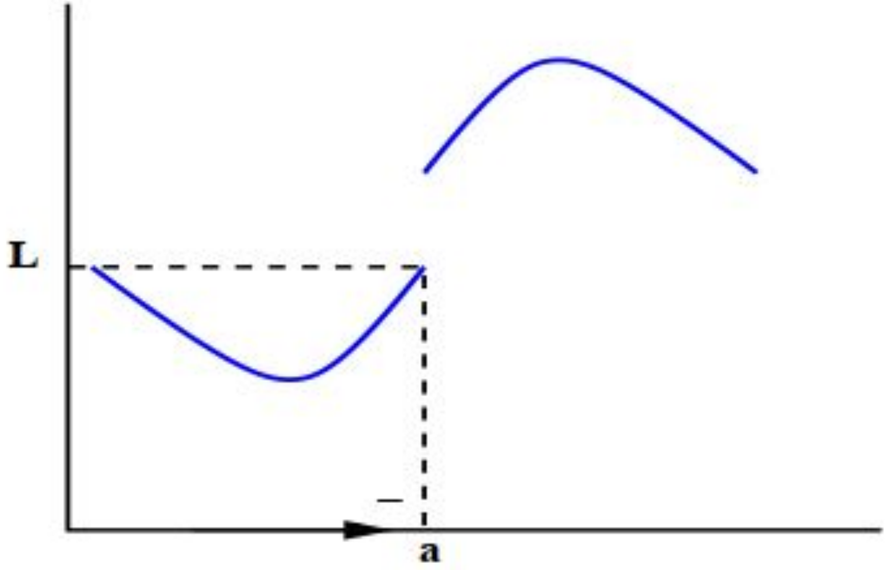
Limites laterais:



Limites laterais:

$x<1$	$f(x)=2x+1$
0	1
0,5	2
0,7	2,4
0,8	2,6
0,9	2,8
0,99	2,98
0,999	2,998
0,9999	2,9998
0,99999	2,99998
0,999999	2,999998
0,9999999	2,9999998
0,99999999	2,99999998

Limites laterais:



Ideia intuitiva de limites laterais

1. Seja f uma função definida em (a,b), onde a < b . Dizemos que a função f tem limite lateral à direita L em a , se f estabiliza em L quando x fica próximo de x = a no intervalo (a,b).
2. Seja f uma função definida em (c,a), onde c < a . Dizemos que a função f tem limite lateral à esquerda L em a , se f estabiliza em L . quando x fica próximo de x = a no intervalo (c,a).

Definição formal de limite lateral

1. *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *tal que existem* $b \in \mathbb{R}$ *e* $(a,b) \subset Dom(f)$. *O número real* L *é o limite à direita de* $f(x)$, *quando* x *se aproxima de* a *pela direita se para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$, *se* $a < x < a + \delta$. *Notação:*

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

2. *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *tal que existem* $c \in \mathbb{R}$ *e* $(c,a) \subset Dom(f)$. *O número real* L *é o limite à esquerda de* $f(x)$, *quando* x *se aproxima de* a *pela esquerda se para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$, *se* $a - \delta < x < a$. *Notação:*

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = L}$$

Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \\ -x^2 + 9 & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

Calcule os limites laterais quando x se aproxima 2 (pela direita e pela esquerda).

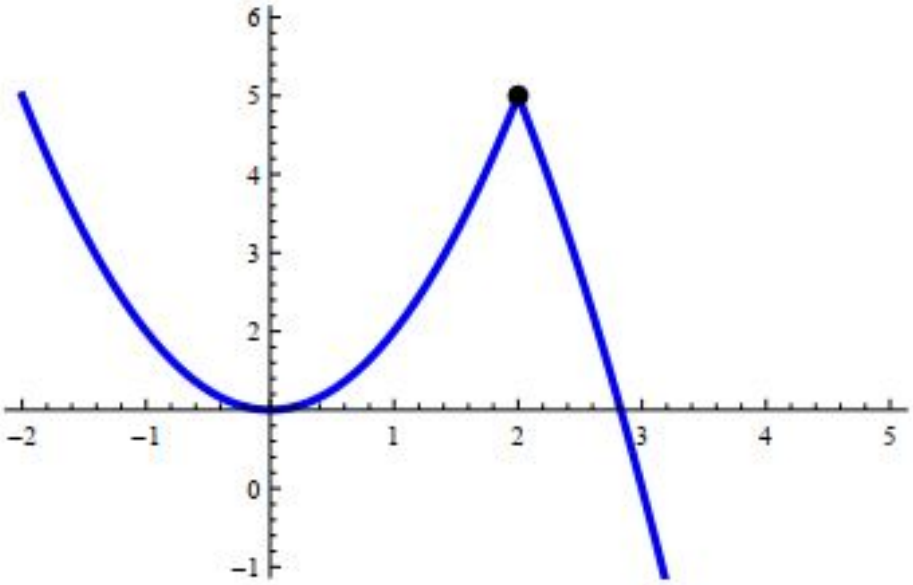


Gráfico de f, perto de 2.

Mais exemplos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 3x & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP