

Lista de exercícios 2 - Relações, funções e suas equações

• $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

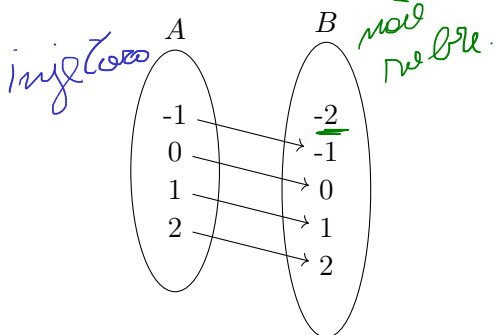
26 de maio de 2021

$f: A \rightarrow B$ é sobre.
 Para todo $b \in B$, existe
 $a \in A$ tal que $f(a) = b$

1. Sejam $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^2 - 5x + 3$. Determine o domínio das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

2. Indique qual das funções abaixo é injetora ou sobrejetora.

a) Função 1



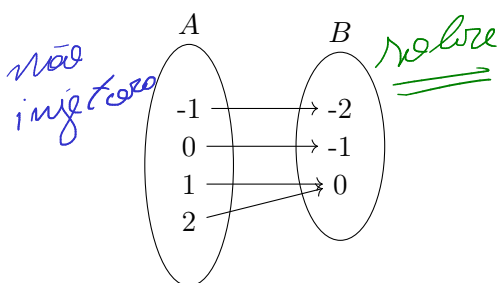
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5x + 3)$$

$$= \sqrt{x^2 - 5x + 2}$$

$$g \circ f(x) = g(\sqrt{x-1}) = (x-1) - 5\sqrt{x-1} + 3$$

$$= x - 5\sqrt{x-1} + 2$$

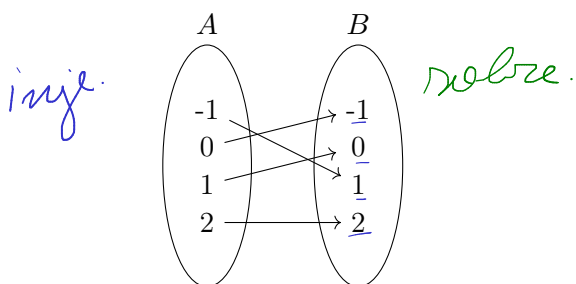
b) Função 2



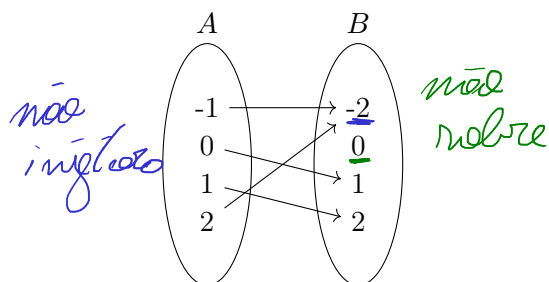
$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 2 \geq 0\}$$

$$D(g \circ f) = [1, \infty)$$

c) Função 3



d) Função 4



3. Indique qual das funções abaixo é injetora ou sobrejetora.

- a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.
 b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|(x - 1)$.
 c) $h: \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

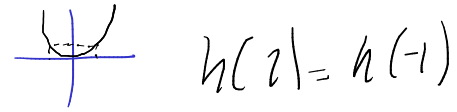
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{n é ímpar.} \end{cases} \quad (1)$$

4. Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais.

- a) Prove que se $f \circ g$ é injetora, então g é injetora.
 b) Prove que se $f \circ g$ é sobrejetora, então f é sobrejetora.

5. Determine a inversa das seguintes funções:

- a) $A = B = \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow B$ é função dada por $f(x) = 2x + 3$.
 b) $A = B = \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow B$ é função dada por $g(x) = x^3 + 2$.
 c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $h: A \rightarrow B$ é função dada por $h(x) = x^2$.
 d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $p: A \rightarrow B$ é função dada por $p(x) = x^2 + 1$.
 e) $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}, B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $q: A \rightarrow B$ é função dada por $q(x) = \frac{x+1}{x-2}$.



6. Resolva em \mathbb{R} as seguintes equações exponenciais:

- a) $7^{4x+3} = 49$. $\rightarrow 4x + 3 = \log_7 49 = 2$
 b) $5^{2x^2+3x-2} = 1$.
 c) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$.
 d) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x-\frac{1}{2}} - 8 = 0$.
 e) $\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}} = 2$.
 f) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = -2^{2x-1} + 3^{x+\frac{1}{2}}$.
 g) $x^{x^2-5x+6} = 1$.
 h) $x^{2x^2-7x+4} = x$.
- Handwritten solutions for c) and d):
 c) $x=0, 0 \neq 0$
 d) $x=1, 1^2 = 1 \checkmark$
 For f): $\log_x x^{x^2-5x+6} = 0$
 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

7. Para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ a equação $4^x - (m - 2)2^x + 2m + 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz real?

8. Resolva em \mathbb{R} as seguintes inequações exponenciais:

- a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$.
 b) $2^x - 1 > 2^{1-x}$.
 c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$.
 d) $2^x(2^x + 1) < 2$.
 e) $3(3^x - 1) \geq 1 - 3^{-x}$.
 f) $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x$.

9. Resolva em $\mathbb{R}_{\geq 0}$ as seguintes inequações:

- a) $x^{2x^2-9x+4} < 1$.
 b) $x^{5x-2} > 1$.

- c) $x^{2x^2+x-1} < 1$.
- d) $x^{3x^2-7x+2} \leq 1$.
- e) $x^{4x-3} < 1$.
- f) $x^{2x^2-5x-3} > 1$.

10. Sejam a, b, c números reais diferentes de um tais que $a = b \cdot c$. Prove que

$$\frac{1}{\log_a c} = 1 + \frac{1}{\log_b c}.$$

11. Sejam a, b, c números reais positivos com $a, a \cdot c \neq 1$. Prove que

$$\log_a b = (\log_{ac} b)(1 + \log_a c).$$

12. Determine o domínio das funções:

- a) $g(x) = \log_{3-x}(x+2)$.
- b) $h(x) = \log_x(x^2+x-2)$.
- c) $p(x) = \log_{2x-3}(-x^2+2x+3)$.

13. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que f é periódica se existe $p \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+p) = f(x).$$

O menor $p \in \mathbb{R}_{>0}$ satisfazendo a relação acima é chamado de período de f . Como exemplo, as funções trigonométricas $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{cos}(x)$ tem 2π como período.

Determine o período e a imagem das seguintes funções:

- a) $f(x) = -2\text{sen}(x)$.
- b) $g(x) = |\text{sen}(x)|$.
- c) $h(x) = \text{cos}(2x)$.
- d) $p(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.
- e) $q(x) = 3\text{cos}(4x)$.
- f) $k(x) = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

14. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ números reais positivos e $f(x) = a + b\text{cos}(cx+d)$. Determine a imagem e o período de f .

15. Para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vale $\text{sen}(x) + \text{cos}(x) > 1$. Justifique.

16. Calcular $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ sabendo que $3\text{cos}(x) + \text{sen}(x) = -1$.

17. Calcular m de modo que se tenha $\text{sen}(x) = 2m + 1$ e $\text{cos}(x) = 4m + 1$.

18. Sabendo-se que $\text{sen}(x) + \text{cos}(x) = a$ e $\text{sen}(x)\text{cos}(x) = b$, determine uma relação entre a e b independente de x .

19. Dado que $\text{sen}(x)\text{cos}(x) = m$, encontre o valor de $y = \text{sen}^4(x) + \text{cos}^4(x)$ e $z = \text{sen}^6(x) + \text{cos}^6(x)$.

20. Simplifique as expressões:

- a) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- b) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

c) $\text{sen}(\frac{3\pi}{2} + x)$.

d) $\text{cos}(x + \frac{\pi}{2})$.

e) $\text{cos}(\frac{3\pi}{2} - x)$.

f) $\text{cos}(\frac{3\pi}{2} + x)$.

21. Prove que se $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$, então

$$\text{sen}(a + b) < \text{sen}(a) + \frac{4}{5}\text{sen}(b).$$

22. Sendo $\text{sen}(\alpha) = \frac{2}{3}$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule

a) $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$.

b) $\text{cos}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$.

23. Sendo $\text{cos}(\alpha) = \frac{3}{5}$ com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule $\text{sen}(3x)$.

24. Sendo $\text{sen}(\alpha) = \frac{12}{13}$ com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $\text{cos}(3x)$.

25. Transforme em produto as seguintes expressões:

a) $y = \text{sen}(5x) + \text{sen}(3x)$.

b) $y = \text{cos}(3x) + \text{cos}(x)$.

c) $y = \text{sen}(7a) + \text{sen}(5a) - \text{sen}(3a) - \text{sen}(a)$.

d) $y = \text{cos}(9a) + \text{cos}(5a) - \text{cos}(3a) - \text{cos}(a)$.

e) $y = \text{sen}(a) + \text{sen}(b) + \text{sen}(c) - \text{sen}(a + b + c)$.

26. Sejam A, B, C ângulos internos de um triângulo. Demonstre as seguintes relações:

a) $\text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C) = 4\text{cos}(\frac{A}{2})\text{cos}(\frac{B}{2})\text{cos}(\frac{C}{2})$.

b) $\text{cos}(A) + \text{cos}(B) + \text{cos}(C) = 1 + 4\text{sen}(\frac{A}{2})\text{sen}(\frac{B}{2})\text{sen}(\frac{C}{2})$.

Gabarito de algumas questões

1. $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\}$ e $D(g \circ f) = [1, \infty)$

2. a) Injetora e não sobrejetora. b) Não injetora e sobrejetora. c) Injetora e sobrejetora. d) Não injetora e não sobrejetora.

3.a) Injetora e sobrejetora. b) Não injetora e sobrejetora. c) Não injetora e sobrejetora.

5. a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$. b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$. c) $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. d) $p^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$. e) $q^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

6. a) $x = -\frac{1}{4}$. c) $x = 1, -2$. g) $x = -1, 1, 2, 3$. h) $x = -1, 0, 1, 3, \frac{1}{2}$.

7. $\{m \in \mathbb{R} : m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m \geq 12\}$.

8. a) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } x \geq 1\}$. b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. c) \mathbb{R}

9. a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$

13. a) $p(f) = 2\pi, \text{Im}(f) = [-2, 2]$. b) $p(g) = 2\pi, \text{Im}(g) = [0, 1]$. c) $p(h) = \pi, \text{Im}(h) = [-1, 1]$. d) $p(p) = 4\pi, \text{Im}(p) = [-1, 1]$. e) $p(q) = \frac{\pi}{2}, \text{Im}(q) = [-3, 3]$. f) $p(k) = 4\pi, \text{Im}(k) = [-1, 3]$.

14. $p(f) = \frac{2\pi}{c}, \text{Im}(f) = [a-b, a+b]$.

16. $\text{sen}(x) = -1, \frac{4}{5}, \text{cos}(x) = 0, -\frac{3}{5}$.

17. $m = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}$.

19. $y = 1 - 2m^2, z = 1 - 3m^2$.

20. a) $\text{cos}(x)$. b) $-\text{cos}(x)$. c) $-\text{cos}(x)$. d) $-\text{cos}(x)$. e) $-\text{sen}(x)$. f) $\text{sen}(x)$.

25. a) $y = 2\text{sen}(4x)\text{cos}(x)$. b) $y = 2\text{cos}(2x)\text{cos}(x)$. c) $y = 4\text{cos}(a)\text{sen}(2a)\text{cos}(4a)$. d) $y = -4\text{cos}(2a)\text{sen}(4a)\text{sen}(3a)$. e) $y = 4\text{sen}(\frac{a+b}{2})\text{sen}(\frac{a+c}{2})\text{sen}(\frac{b+c}{2})$.