1. Séries de termos positivos

Para obter condições suficientes para a convergência, é conveniente começar com séries de **termos positivos.**

Definição 1.1. *Diremos que a série* $\sum a_n$ *é de termos positivos se* $a_n \geq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Proposição 1.2. *Uma série* $\sum a_n$ *de termos positivos é convergente se e somente se suas somas parciais* $S_n = \sum_{i=1}^{n} a^i$ *formam uma sequência limitada.*

Proposição 1.3. *(Critério da Comparação) Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$*, séries de termos positivos tais que* $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Então, se* $\sum b_n$ *é convergente* $\sum a_n$ *também é convergente.*

Observação 1.4. *Como já observamos no caso de sequências, as hipóteses nesses e outros resultados para séries só precisam ser verificadas para* $n \geq n_0$ *onde* n_0 *é um número natural qualquer.*

Exemplos 1.5. *Consideremos a série harmônica generalizada* $\sum \frac{1}{n^s}$ *sendo* $s \in \mathbb{R}$ *qualquer.*

- *Se* $s \leq 1$ *a série diverge por comparação com a sérei harmônica* $\sum \frac{1}{n}$*.*
- *Se* $s \geq 2$*, então* $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$*.*
  Portanto a série harmônica generalizada converge neste caso.
- *O caso* $1 < s \leq 2$ *é mais delicado. Vamos mostrar convergência nesse caso. Para isto, em vista a proposição 1.2,*

Date: May 31, 2021.

basta encontar uma subsequência das somas parciais S_n limitada. Temos

$$S_{2^{n+1}-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{(2^n)^r} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^r}\right) < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + + \frac{2^n}{2^{rn}}$$
$$< \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2^r}\right)^n.$$

O valor na última linha é a soma da série geométrica de razão $a = \left(\frac{2}{2^r}\right) < 1$. Portanto, neste caso as somas parciais são limitadas e a série converge.

Concluímos, portanto, que a série harmônica generalizada $\sum \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$ converge se e somente se $s > 1$.

Uma consequência simples, frequentemente utilizada do critério da comparação é a seguinte:

Corolário 1.6. *(Teste da comparação no limite) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$, séries de termos positivos tais que existe o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r,$$

Então temos:

- *Se $r = 0$ e $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.*
- *Se $r = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.*
- *Se $0 < r < +\infty$ então $\sum a_n$ converge se e somente se $\sum b_n$ converge.*

□

Exemplo 1.7. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n^2-7n+1}$ *converge por comparação no limite com a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Proposição 1.8. *(Teste da raiz) Seja* $\sum a_n$ *uma séries de termos positivos tal que* $\sqrt[n]{a_n} \leq c < 1$, *para todo* n *suficientemente grande. Então a série converge.*

□

Corolário 1.9. *(Teste da raiz no limite) Seja* $\sum a_n$ *uma séries de termos positivos tal que existe* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. *Então temos:*

- *Se* $a < 1$, *a série converge,*
- *Se* $a > 1$, *a série diverge.*

□

Exemplos 1.10.

(1) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n+1}$ *converge pelo teste da raiz no limite.*
(2) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n$ *converge se* $0 \leq a < 1$ *pelo teste da raiz no limite e diverge se* $a \geq 1$, *pois o termo geral não vai a zero.*
(3) *Para a série harmônica generalizada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, *temos* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = 1$, *para todo* s. *Isso mostra que o critério nada decide quando o limite é igual a 1.*

Observação 1.11. *No último caso, porém, se ocorrer que* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *para uma infinidade de valores de* n, *a série diverge, pois* $a_n \not\to 0$.

Resultados similares podem ser obtidos tomando a razão entre termos sucessivos.

Proposição 1.12. *(Teste da razão) Seja* $\sum a_n$ *uma séries de termos positivos tal que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c < 1$, *para todo* n *suficientemente grande. Então a série converge.*

$\square$

Corolário 1.13. *(Teste da razão no limite) Seja* $\sum a_n$ *uma séries de termos positivos tal que existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$*. Então temos:*

- *Se* $a < 1$*, a série converge,*
- *Se* $a > 1$*, a série diverge.*

$\square$

Observação 1.14. *Uma observação semelhante à observação 1.11 feita acima para o teste da raiz se aplica para o teste da razão. Mais exatamente, se* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$*, mas* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$*, para* $n \geq n_0$*,* $n_0 \in \mathbb{N}$ *a série diverge, pois* $a_n \not\to 0$*. Isto ocorre, por exemplo, no caso da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$*.*

Exemplos 1.15. (1) *Os exemplos 1.10 podem ser tratados usando o teste da razão.*

(2) *Consideremos a série* $1 + 2a + a^2 + \cdots + 2a^{2n-1} + a^{2n}$*, para* $a > 0$*. Então temos* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n=1]{2a^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a^{2n}} = a$ *Portanto* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ *e a série converge para* $0 < a < 1$ *e diverge para* $a > 1$*, pelo critério da raiz. Entretanto, não existe o* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *e, portanto o critério da razão nada decide, neste caso.*

No último exemplo o teste da raiz no limite pode ser aplicado, mas o teste da razão não. Por outro lado, pode-se mostar que o teste da raiz é sempre aplicável, se o da razão o for.

Proposição 1.16. *Seja* $\sum a_n$ *uma séries de termos positivos tal que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$*, para* $n \geq n_0$*. Então, se* $c' > c$*, temos* $\sqrt[n]{a_n} < c'$*, para* n *suficientemente grande.*

Dem:

$\square$