SÉRIES INFINITAS

1. Introdução

É conveniente começar com um exemplo. Seja a um número real qualquer. Então, se $a \neq 1$ a n**-ésima soma** (soma dos n primeiros termos) da sequência progressão geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := a^n$ é dada por:

$$S_n := a + a^2 + \cdots + a^n = a\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Se $|a| < 1$ então existe o limite

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a}{1-a}$$

e escreveremos:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a^i$$

Agora se $|a| \geq 1$, ainda usamos a notação $\sum_{i=1}^{\infty} a^i$, para a "soma infinita" $a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$ embora não possamos atribuir um valor definido a esta soma.

Mais geralmente, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica qualquer usaremos o símbolo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ para indicar a 'soma infinita': $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ e diremos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é a **série infinita** gerada pela sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [1].

Date: May 30, 2021.

[1] Se esta 'definição' lhe parece excessivamente informal, pode tomar como definição de série infinita a sequência das somas parciais, definida abaixo.

Como é usual, também usaremos o símbolo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ para indicar o limite: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$, quando este existir. Essa ambiguidade, porém, não deve causar confusão.

De fato, problema central no estudo das séries infinitas é determinar se este limite existe.

Definição 1.1. *Dada a série infinita $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, sua $n-$ésima soma parcial é definida por*

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$$

.

Definição 1.2. *Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$* ***converge para*** *$S \in \mathbb{R}$, se existir o limite*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

e escreveremos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S.$$

Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ***converge*** *se ela converge para algum número real S. Caso contrário, dizemos que a série* ***diverge****.*

Observação 1.3. *As notações: $\sum_{i=0}^{\infty}$, $\sum_{i=n_0}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum a_n$ etc também serão usadas, para denotar uma série infinita (ou eu limite).*

Exemplos 1.4.

(1) *Consideremos a série: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Como indicado acima, se $a \neq 1$, temos:*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i = (1 + a + \cdots + a^{n-1}) = \frac{1-a^n}{1-a},$$

- *Se* $|a| < 1$,
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a},$$
ou seja, a série ***converge*** *para* $\frac{1}{1-a}$ *nesse caso.*
- *Se* $a > 1$, *temos:*
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - 1}{a-1} + \infty.$$
e a série ***diverge*** *para* $+\infty$.
- *Se* $a < -1$, *temos:*
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = -\infty$$
e a série ***diverge***.
- *Se* $a = -1$, *temos* $S_{2n} = -1$ *e* $S_{2n+1} = 0$. *Portanto*
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = 1.$$
e a série ***diverge***.
Finalmente, se $a = 1$, *temos:*
$$S_n = n$$
Portanto
$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$
e a série ***diverge*** *para* $+\infty$.
Concluímos que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ *converge se e somente se* $|a| < 1$.

(2) *Consideremos a série:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Observando que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *obtemos* $S_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \cdots + (1/n) - (1/n+1) = 1 - (1/n+1)$. *Portanto*
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - (1/n+1) = 1$$
e a série ***converge*** *para* 1.

Exemplos como acima, nos quais a convergência pode ser determinada diretamente, são raros e vamos precisar de resultados que auxiliem nessa tarefa. O primeiro resultado importante é a seguinte condição necessária para a convergência de séries.

Teorema 1.5. *Se a série* $\sum a_n$ *converge então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dem:

$\square$

Exemplo 1.6. *A série geométrica:* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ *diverge se* $|a| > 1$.

Observação 1.7. *A recíproca do teorema 1.5 é falsa. O contra-exemplo clássico é a* ***série harmônica*** $\sum \frac{1}{n}$ *que diverge para* $+\infty$.

Observação 1.8. *Das propriedades para sequências numéricas, decorrem imediatamente propriedades análogoas para séries infinitas. Em particular, se* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *são séries convergentes, então as séries* $\sum a_n + b_n$ *e* $\sum ka_n$*, também convergem, respectivamente para a soma dos limites e produto do primeiro pela constante* k*, respectivamente.*