1. Critérios de Abel e Dirichlet

Veremos agora alguns outros critérios de convergência um pouco menos utilizados, mas ainda importntes.

Lema 1.1. *(Abel) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sequências de números reais (não necessariamente convergentes). Se $s_n := \sum_{i=1}^n a_i$ denota a $n-$ésima soma parcial de $\sum a_n$, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Dem: Temos $a_i = s_{i+1} - s_i$ Portanto

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_{n-1}b_{n_1} + a_nb_n \\
&\qquad = s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + (s_3 - s_2)b_3 + \cdots + (s_{n-1} \\
&\qquad - s_{n-2})b_{n_1} + (s_n - s_{n-1})b_n \\
&\qquad = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3(b_3 - b_4) + \cdots + s_{n-1}(b_{n_1} - b_n) \\
&\qquad + s_nb_n
\end{aligned}$$

Desse resultado, obtemos os seguintes critérios de convergência:

Proposição 1.2. *(Critério de Dirichlet) Seja $\sum a_n$ uma série cujas somas parciais são limitadas e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Então a série $\sum a_nb_n$ é convergente.*

Date: June 6, 2021.

Dem: De fato, a série $\sum(b_i - b_{i+1})$ é absolutamente convergente e o resultado segue então do lema de Abel.

$\square$

Proposição 1.3. *(Critério de Abel) Seja $\sum a_n$ uma série convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.*

Dem: Se $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ então a sequência $(bn - c)$ está nas hipóteses do Critério de Dirichlet. Segue que $\sum a_n(b_n - c)$ converge. Portanto $\sum a_n b_n = \sum a_n(b_n - c) + \sum c \cdot a_n$ converge.

$\square$

Exemplo 1.4. *Supoohamos* $x \neq 2k\pi$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Então séries* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, nx}{n}$ *convergem pelo critério de Dirichlet.*

2. Associatividade e comutatividade

Para somas finitas, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, valem as propriedades de **associatividade** (ou seja, podemos inserir parênteses de forma arbitrária) e **podemos permutar os termos de forma arbitrária**. Consideremos o que ocorre no caso de somas infinitas.

Para a associatividade, a propriedade se mantém para séries convergentes. Ao inserir parênteses , estamos tomando subsequências da sequência dada. Portanto, se esta converge, a convergência se mantém.

A questão da comutatividade é mais delicada e vamos precisar de alguns resultados preliminares.

Dado uma sequência qualquer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vamos denotar por $p_n = \max\{0, a_n\}$ e $q_n = \max\{0, -a_n\}$ a **parte positiva** e **parte negativa** de a_n, respectivamente. Temos então a decomposição da série $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ como diferença de duas series positivas.

Proposição 2.1. *A série $\sum a_n$ converge absolutamente se e somente se suas partes positiva $\sum p_n$ e negativa $\sum q_n$ convergem. Se a série $\sum a_n$ converge condicionalmente então suas partes positiva $\sum p_n$ e negativa $\sum q_n$ divergem (para $+\infty$).*

Dem:

$\square$

Definição 2.2. *Dizemos que a série $\sum a_n$ é comutativamente convergente (ou converge comutativamente) se, para toda bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a série $\sum a_{\phi(n)}$ converge (A série $\sum b_n$, com $b_n = a_{\phi(n)}$, é denominada uma* ***reordenação*** *de $\sum a_n$).*

Proposição 2.3. *Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente (para a mesma soma).*

Dem: Suponhamos primeiro que a série $\sum a_n$ é de termos positivos. Dada uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denotemos por $b_n := \phi(n)$ Seja $S_n := \sum_{i=1}^{i} a_n$ e $T_n := \sum_{i=1}^{i} a_n$. Seja agora, para $n \in \mathbb{N}$ $m := \sup\{\phi(i) : i \leq n\}$. Então temos $T_n \leq S_m \leq \sum a_n$. Reciprocamente, (tomando ϕ^{-1} no lugar de ϕ), segue que $S_n \leq \sum a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando limites, obtemos $\sum a_n \leq \sum b_n$.

O caso geral se obtem, usando a decomposição de $\sum a_n$ como diferença de séries positivas.

□

O resultado seguinte, devido a Riemann contém a recíproca do anterior.

Proposição 2.4. *Seja* $\sum a_n$ *uma série condicionalmente convergente. Então, para todo* $c \in \mathbb{R}$*, existe uma reordenação* (b_n) *dos termos de* $\sum a_n$*, tal que* $\sum b_n = c$

Dem:

Seja $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ a decomposição em parte positiva e negativa.

Sabemos que $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Dado c, seja n_1 o menor natural tal que $\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c$. Então $0 < \sum_{n=1}^{n_1} p_n - c \leq p_{n_1}$. Seja agora n_2 o menor natural tal que $\sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{n_2} q_n < c$. Então $-q_{n_2} < \sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{n_2} q_n - c < 0$. Prosseguindo dessa maneira, encontramos uma reordenação de $\sum a_n$ cujas somas parciais S_N satisfazem $-q_{n_{2i}} < S_N - c < p_{n_{2i-1}}$ para $n_{2i-1} < N < n_{2i}$, sendo n_j uma sucessão crescente de números naturais. Como $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$, segue o resultado.

□