SÉRIES INFINITAS

1. Critério de Cauchy e convergência absoluta

Consideremos agora séries em que os termos podem mudar de sinal.
O critério básico para a convergência dessas séries é consequência direta do critério de Cauchy para sequências

Definição 1.1. *Diremos que a série* $\sum a_n$ *satisfaz o critério de Cauchy se e somente se suas somas parciais* $S_n : \sum_{i=1}^{n} a_i$ *formarem uma sequência de Cauchy, ou seja:*

Dado $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de tal forma que se* $n > m \geq n_0$ *então*

$$|S_n - S_m| := |\sum_{i=m+1}^{n} a_i| < \epsilon.$$

Teorema 1.2. *Uma série* $\sum a_n$ *é convergente se e somente se satisfaz o critério de Cauchy.*

Dem:

Date: June 2, 2021.

□

Definição 1.3. *Dizemos que a série* $\sum a_n$ *converge absolutamente (ou em valor absoluto) se a série* $\sum |a_n|$ *converge.*

Proposição 1.4. *Se a sŕie* $\sum |a_n|$ *converge então a série* $\sum a_n$ *converge. Ou seja, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Dem:

□

A proposição 1.4 permite decidir sobre a convergência de séries cujos termos mudam de sinal usando os critérios estudados para as séries positivas.

Exemplo 1.5. *A série* $\sum \frac{sen\, n}{n^2}$ *converge. De fato temos* $|\frac{sen\, n}{n^2}! \leq \frac{1}{n^2}$. *Portanto a série* $\sum |\frac{sen\, n}{n^2}|$ *converge pelo critério de comparação, ou seja, a série dada cpmverge absolutamente. portanto converge.*

Observação 1.6. *Os testes de convergência estudados para séries positivas podem ser enunciados diretamente para a convergência absoluta de séries não necessariamente positivas. Por exemplo, o teste da raiz pode ser reenunciado assim:*

Seja $\sum a_n$ uma séries tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$, para todo n suficientemente grande. Então a série converge converge absolutamente (portanto converge).

Exemplos 1.7.

(1) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n$ converge absolutamente se $|a| < 1$ pelo teste da raiz no limite e diverge se $|a| \geq 1$, pois o termo geral não vai a zero.*

(2) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo critério da razão no limite (aqui, é mais fácil aplicar o teste da razão).*

2. Convergência condicional

Os critérios de convergência vistos permitem decidir sobre a convergência absoluta de séries. Entretanto, quando a série não converge absolutamente, ainda pode ocorrer a convergência.

Definição 2.1. *Dizemos que a série $\sum a_n$ converge condicionalmente se ocorrer que ela converge, mas a série dos módulos $\sum |a_n|$ diverge (ou seja ela não converge absolutamente).*

Entre os casos para os quais podemos estabelecer a convergência condicional temos o **Critério de Leibniz** para as séries **alternadas**, isto é séries do tipo

$$\sum (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

Proposição 2.2. *Seja $\sum (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n \geq 0$. uma série alternada tal que:*

(1) *$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente.*

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Então a série $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge para um número real S. Além disso, se $S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} a_i$ então $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

Dem: Aprova é feita em vários passos.
1) A sequência (S_{2n+1}) das somas parciais ímpares é decrescente.
De fato, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$.
2) A sequência (S_{2n}) das somas parciais pares é crescente.
De fato, temos, para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $S_{2n} - S_{2(n-1)} = a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$.
3) Qualquer soma parcial ímpar é maior ou igual que qualquer soma parcial par.
De fato, suponhamos $S_{2n+1} < S_{2k}$. Se $k < n$, então pelo passo 2), $S_{2n+1} < S_{2k} < S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1},$, uma contradição.
Se $n < k$, então pelo passo 1), $S_{2k} > S_{2n+1} > S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$.
4) Seja $S_1 := \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ e $S_2 := \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ (que existem pelos passos anteriores).
Do passo 3), temos $S_1 \leq S_2$. Por outro lado $S_2 - S_1 \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$.
Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, Segue que $S_1 = S_2$ e e $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.
Finalmente, $0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ e $0 \leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}$. □

Exemplos 2.3. (1) *A série* $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^n}$ *converge absolutamente.*
A série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *converge condicionalmente.*