AULAS ANTERIORES 21/05/2021

PRODUTO ESCALAR (definido no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$)

$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ... base ortonormal $\therefore$ $\begin{cases} \vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E \\ \vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E \end{cases}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$

produto escalar

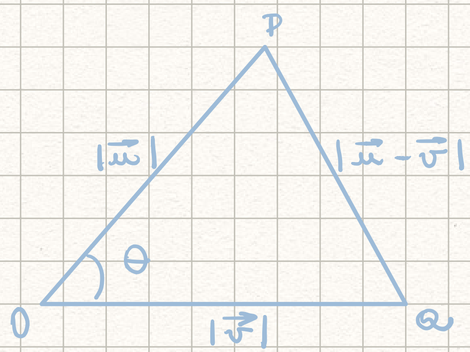
Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Versor: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} |\vec{u}| = 1 \\ \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ têm mesmo sentido} \end{cases}$

Distância: $\delta(A, B) = |\vec{AB}|$

Ângulo entre dois vetores:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$

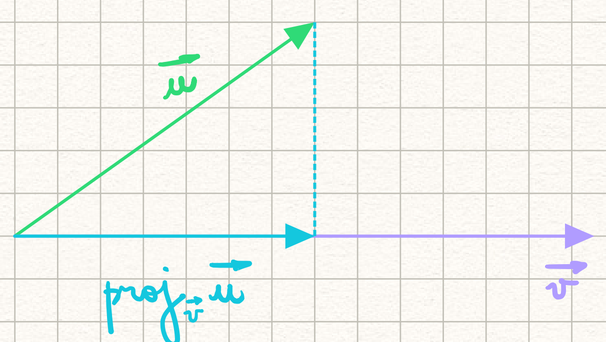


Lei dos Cossenos

Ortogonalidade entre dois vetores:

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Projeção Ortogonal:



$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$$

PRODUTO VETORIAL (Definido no $\mathbb{R}^3$)

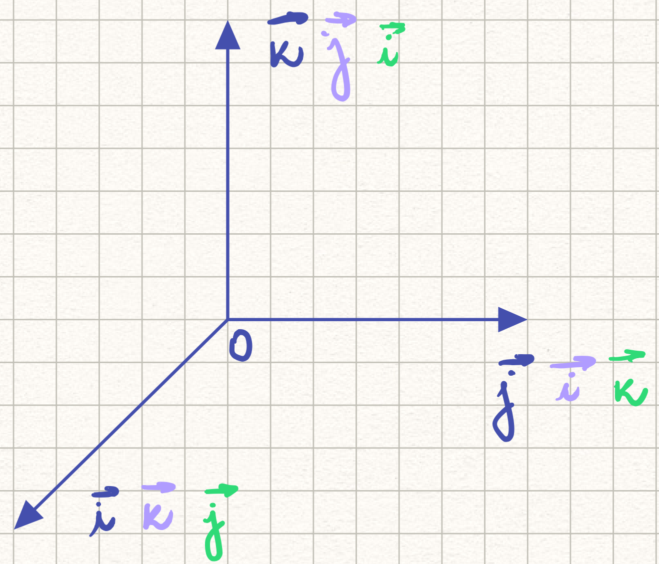
Seja a base canônica do $\mathbb{R}^3$: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam os vetores: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x, y, z)$.

Se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, então pode ser representado por:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

produto vetorial

Regra da Mão Direita:

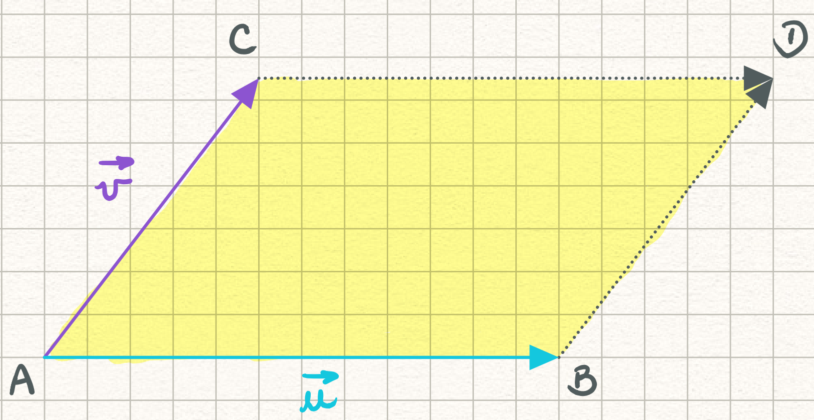


$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Área do Paralelogramo:



Área $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

7.3 PRODUTO MISTO

Sejam $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e os vetores:
$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$.
O **Produto Misto** dos vetores, tomados nessa ordem, é o **escalar**:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

produto misto

Definido somente no $\mathbb{R}^3$!

Slide 11: Propriedades

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$; $m \in \mathbb{R}$.

I) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

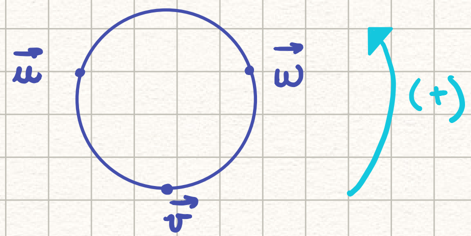
a) Um dos vetores é nulo: linha de zeros.

b) Dois vetores LD: duas linhas proporcionais. $\vec{w} = m\vec{v}$

c) Três vetores LD: uma linha é resultado de soma ponderada das outras duas. $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

II) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

$\longrightarrow$ Permutar as 3 linhas obedecendo à Propriedade Cíclica, não afeta o produto misto.



OBS: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

$\longrightarrow$ Permutar 2 linhas, sem obedecer à Propriedade Cíclica, inverte o sinal do produto misto.

III) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}]$, $\vec{r} = (a, b, c)$

Das propriedades de determinante, detectando-se um padrão de soma entre duas linhas ou duas colunas, o determinante pode ser dividido em 2, mantendo inalteradas as linhas (ou colunas) que não compuserem o padrão de soma. Assim:

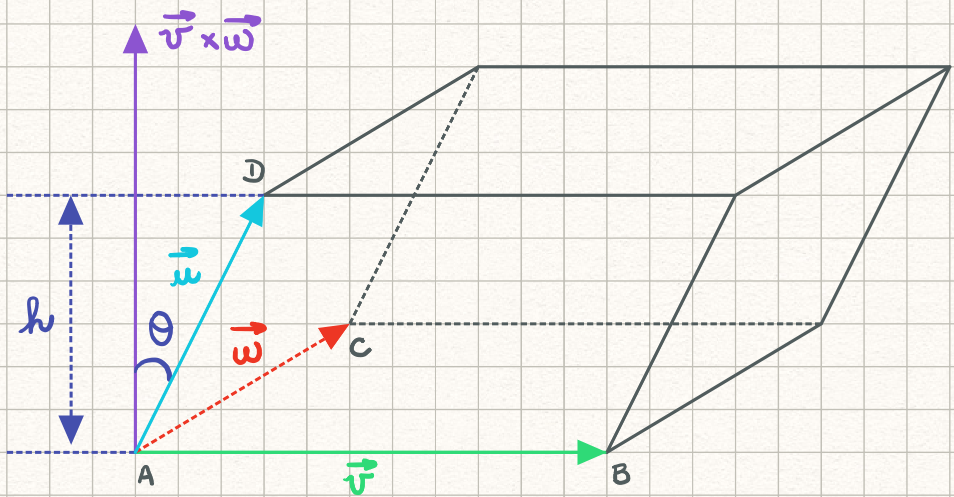
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 + a & y_3 + b & z_3 + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

IV) $[m\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, m\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, m\vec{w}] = m[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Da mesma forma que o produto escalar e o produto vetorial, o produto misto também é sensível à multiplicação de um vetor por um escalar, na mesma proporção do escalar.

Slide 12: Volume do Paralelepípedo

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ... LI



Volume do Paralelepípedo:

V = (área da base) · altura

$V = A_b \cdot h$

$$\left.\begin{aligned} A_b &= |\vec{v} \times \vec{w}| \\ h &= |\vec{u} \cos\theta| = |\vec{u}|\,|\cos\theta| \end{aligned}\right\} \quad V = |\underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{=\vec{a}}|\,|\vec{u}|\,|\cos\theta| \qquad (1)$$

Se $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}$, então a eq. (1) pode ser reescrita como:

$$V = |\vec{a}|\,|\vec{u}|\,|\cos\theta| \qquad (2)$$

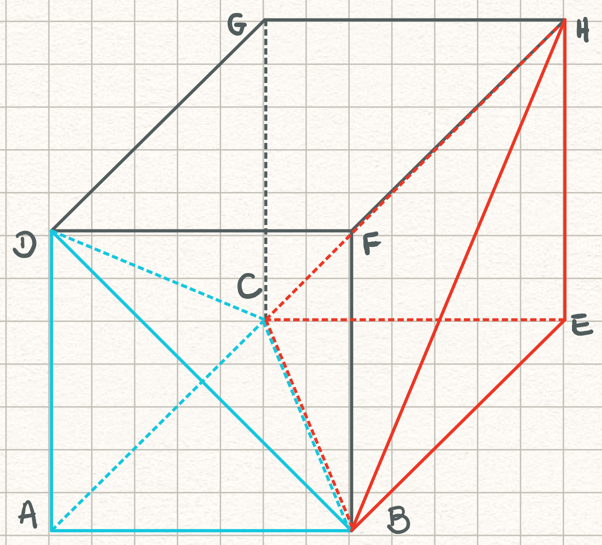
Lembrando que: $\vec{u} \cdot \vec{a} = |\vec{u}|\,|\vec{a}| \cos\theta$, tem-se em (2):

$$V = |\vec{u} \cdot \vec{a}| \xrightarrow{\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}} V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Portanto:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Slide 13 : Volume do Tetraedro



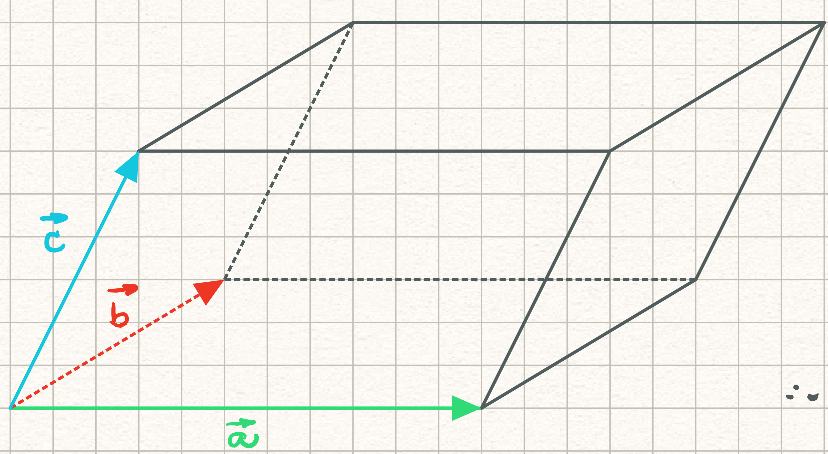
Cada Tetraedro ABCD equivale a $\frac{1}{6}$ de um paralelepípedo. Portanto:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right|$$

6 Tetraedros $\begin{cases} 3: \text{base azul (ABC) e vértices D, F ou G.} \\ 3: \text{base vermelha (BCE) e vértices H, F ou G.} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

1)



$V_P = 42$

$V_P = \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|$

$\therefore \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right| = 42$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = (2, -1, -3) \\ \vec{b} = (-1, 1, -4) \\ \vec{c} = (m+1, m, -1) \end{array}\right\} \quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ m+1 & m & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 3m + 4(m+1) + 3(m+1) + 8m + 1$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 18m + 6$$

$\therefore \quad |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| = 42 \longrightarrow [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \pm 42$

$$18m + 6 = \pm 42 \quad \begin{cases} 18m + 6 = -42 \longrightarrow m = -8/3 \\ 18m + 6 = 42 \longrightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$m = -\frac{8}{3} \text{ ou } m = 2$$

2) $[\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

$[\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u}] = A$

Aplicando a Propriedade da soma de vetores em uma linha:

$$\begin{aligned}
A &= [\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}] + [\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}] \\
&= [\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}] + \cancel{[\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}]}^{=0 \text{ (duas linhas iguais)}} + \\
&\quad [\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}, \vec{u}] + [\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \\
&= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \cancel{[\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}]}^{=0} + \cancel{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}]}^{=0} + \\
&\quad \cancel{[\vec{v}, \vec{v}, \vec{u}]}^{=0} + \cancel{[\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}]}^{=0} + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \\
&= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]
\end{aligned}$$

Aplicando a Propriedade cíclica no 2º termo:

$$A = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Portanto:

$$[\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

3) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$

$$[\underbrace{2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}}_{=\vec{a}}, \underbrace{-\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}}_{=\vec{b}}, \vec{v} - 3\vec{w}] = A = ?$$

Aplicando a Propriedade da soma de vetores em uma linha:

$$A = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{v} - 3\vec{w}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}] + [\vec{a}, \vec{b}, -3\vec{w}]$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}] - 3[\vec{a}, \vec{b}, \vec{w}]$$

Mas: $\vec{b} = -\vec{u} + \underbrace{\vec{v} - \vec{w}}_{=\vec{c}} \quad \therefore \quad \vec{b} = -\vec{u} + \vec{c}$

$$\therefore A = [\vec{a}, -\vec{u} + \vec{c}, \vec{v}] - 3[\vec{a}, -\vec{u} + \vec{c}, \vec{w}]$$

$$= -[\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{v}] +$$

$$3[\vec{a}, \vec{u}, \vec{w}] - 3[\vec{a}, \vec{c}, \vec{w}]$$

Substituindo $\vec{c} = \vec{v} - \vec{w}$:

$$A = -[\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] + [\vec{a}, \vec{v} - \vec{w}, \vec{v}] +$$

$$3[\vec{a}, \vec{u}, \vec{w}] - 3[\vec{a}, \vec{v} - \vec{w}, \vec{w}]$$

$$= -[\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] + \underbrace{\cancel{[\vec{a}, \vec{v}, \vec{v}]}}_{=0} - [\vec{a}, \vec{w}, \vec{v}] +$$

$$3[\vec{a}, \vec{u}, \vec{w}] - 3[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] + \underbrace{\cancel{3[\vec{a}, \vec{w}, \vec{w}]}}_{=0}$$

Mas: $\vec{a} = 2\vec{u} \underbrace{- 3\vec{v} + \vec{w}}_{=\vec{d}} \quad \therefore \quad \vec{a} = 2\vec{u} + \vec{d}$

$$\therefore A = -[2\vec{u} + \vec{d}, \vec{u}, \vec{v}] - [2\vec{u} + \vec{d}, \vec{w}, \vec{v}] +$$

$$3[2\vec{u} + \vec{d}, \vec{u}, \vec{w}] - 3[2\vec{u} + \vec{d}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$= -\underbrace{\cancel{[2\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}]}}_{=0} - [\vec{d}, \vec{u}, \vec{v}] -$$

$$[2\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] - [\vec{d}, \vec{w}, \vec{v}] +$$

$$3\underbrace{\cancel{[2\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}]}}_{=0} + 3[\vec{d}, \vec{u}, \vec{w}] -$$

$$3[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] - 3[\vec{d}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Substituindo $\vec{d} = -3\vec{v} + \vec{w}$:

$$A = 3\underbrace{\cancel{[\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}]}}_{=0} - [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] +$$

$$3\underbrace{\cancel{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]}}_{=0} + 3\underbrace{\cancel{[\vec{w}, \vec{w}, \vec{v}]}}_{=0} + 3(-3)[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] +$$

$$3\underbrace{\cancel{[\vec{w}, \vec{u}, \vec{w}]}}_{=0} - 6[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] - 3(-3)\underbrace{\cancel{[\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}]}}_{=0} -$$

$$3\underbrace{\cancel{[\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}]}}_{=0}$$

$$\therefore A = -[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] - 9[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] -$$

$$6[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$A = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + 9[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] -$$

$$6[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$A = (-1 + 2 + 9 - 6)[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$A = 4 \cdot 6 = 24$$

Logo:

$$[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - 3\vec{w}] = 24$$