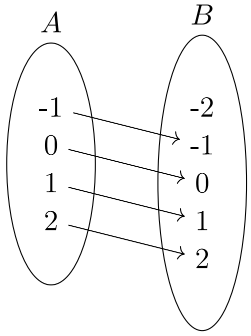
Lista de exercícios 2 - Relações, funções e suas equações

23 de maio de 2021

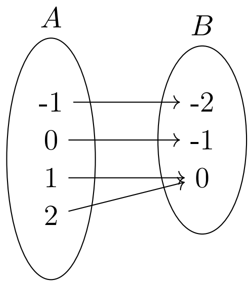
1. Sejam $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^2 - 5x + 3$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

2. Indique qual das funções abaixo é injetora ou sobrejetora.

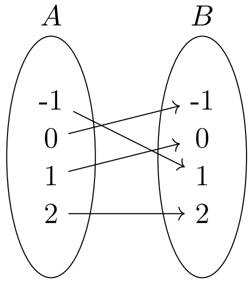
a) Função 1



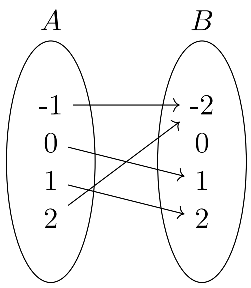
b) Função 2



c) Relação 3



d) Função 4



3. Indique qual das funções abaixo é injetora ou sobrejetora.

   a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.
   b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|(x-1)$.
   c) $h\colon \mathbb{N} := \{0,1,2,\ldots\} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se n é par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{n é ímpar.} \end{cases} \tag{1}$$

4. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais.

   a) Prove que se $f \circ g$ é injetora, então g é injetora.
   b) Prove que se $f \circ g$ é sobrejetora, então f é sobrejetora.

5. Determine a inversa das seguintes funções:

   a) $A = B = \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ é função dada por $f(x) = 2x + 3$.
   b) $A = B = \mathbb{R}$ e $g\colon A \to B$ é função dada por $g(x) = x^3 + 2$.
   c) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$ e $h\colon A \to B$ é função dada por $h(x) = x^2$.
   d) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 1\}$ e $p\colon A \to B$ é função dada por $p(x) = x^2 + 1$.
   e) $A = \mathbb{R}\setminus\{2\}, B = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ e $q\colon A \to B$ é função dada por $q(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

6. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações exponenciais:

   a) $7^{4x+3} = 49$.
   b) $5^{2x^2+3x-2} = 1$.
   c) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$.
   d) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x-\frac{1}{2}} - 8 = 0$.
   e) $\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}} = 2$.
   f) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = -2^{2x-1} + 3^{x+\frac{1}{2}}$.
   g) $x^{x^2-5x+6} = 1$.
   h) $x^{2x^2-7x+4} = x$.

7. Para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ a equação $4^x - (m-2)2^x + 2m + 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz real?

8. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações exponenciais:

   a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$.
   b) $2^x - 1 > 2^{1-x}$.
   c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$.
   d) $2^x(2^x + 1) < 2$.
   e) $3(3^x - 1) \geq 1 - 3^{-x}$.
   f) $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x$.

9. Resolva em $\mathbb{R}_{\geq 0}$ as seguintes inequações:

   a) $x^{2x^2-9x+4} < 1$.
   b) $x^{5x-2} > 1$.

c) $x^{2x^2+x-1} < 1$.

d) $x^{3x^2-7x+2} \leq 1$.

e) $x^{4x-3} < 1$.

f) $x^{2x^2-5x-3} > 1$.

10. Sejam a, b, c números reais diferentes de um tais que $a = b \cdot c$. Prove que

$$\frac{1}{log_a c} = 1 + \frac{1}{log_b c}.$$

11. Sejam a, b, c números reais positivos com $a, a \cdot c \neq 1$. Prove que

$$log_a b = (log_{ac} b)(1 + log_a c).$$

12. Determine o domínio das funções:

a) $g(x) = log_{3-x}(x+2)$.

b) $h(x) = log_x(x^2 + x - 2)$.

c) $p(x) = log_{2x-3}(-x^2 + 2x + 3)$.

13. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que f é periódica se existe $p \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+p) = f(x).$$

O menor $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfazendo a relação acima é chamado de período de f. Como exemplo, as funções trigonométricas $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ tem períodos 2π.

Determine o período e a imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = -2sen(x)$.

b) $g(x) = |sen(x)|$.

c) $h(x) = cos(2x)$.

d) $p(x) = sen(\frac{x}{2})$.

e) $q(x) = 3cos(4x)$.

f) $k(x) = 1 + 2sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$.

14. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ números reais positivos e $f(x) = a + bcos(cx + d)$. Determine a imagem e o período de f.

15. Para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vale $sen(x) + cos(x) > 1$. Justifique.

16. Calcular $sen(x)$ e $cos(x)$ sabendo que $3cos(x) + sen(x) = -1$.

17. Calcular m de modo que se tenha $sen(x) = 2m + 1$ e $cos(x) = 4m + 1$.

18. Sabendo-se que $sen(x) + cos(x) = a$ e $sen(x)cos(x) = b$, determinar uma relação entre a e b independente de x.

19. Dado que $sen(x)cos(x) = m$, encontre o valor de $y = sen^4(x) + cos^4(x)$ e $z = sen^6(x) + cos^6(x)$.

20. Simplifique as expressões:

a) $sen(x + \frac{\pi}{2})$.

b) $sen(\frac{3\pi}{2} - x)$.

c) $sen(\frac{3\pi}{2} + x)$.
d) $cos(x + \frac{\pi}{2})$.
e) $cos(\frac{3\pi}{2} - x)$.
f) $cos(\frac{3\pi}{2} + x)$.

21. Prove que se $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$, então

$$sen(a + b) < sen(a) + \frac{4}{5}sen(b).$$

22. Sendo $sen(\alpha) = \frac{2}{3}$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule

a) $sen(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$.
b) $cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$.

23. Sendo $cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule $sen(3x)$.

24. Sendo $sen(\alpha) = \frac{12}{13}$ com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $cos(3x)$.

25. Transforme em produto as seguintes expressões:

a) $y = sen(5x) + sen(3x)$.
b) $y = cos(3x) + cos(x)$.
c) $y = sen(7a) + sen(5a) - sen(3a) - sen(a)$.
d) $y = cos(9a) + cos(5a) - cos(3a) - cos(a)$.
e) $y = sen(a) + sen(b) + sen(c) - sen(a + b + c)$.

26. Sejam A, B, C ângulos internos de um triângulo. Demonstre as seguintes relações:

a) $sen(A) + sen(B) + sen(c) = 4cos(\frac{A}{2})cos(\frac{B}{2})cos(\frac{C}{2})$.
b) $cos(A) + cos(B) + cos(c) = 1 + 4sen(\frac{A}{2})sen(\frac{B}{2})sen(\frac{C}{2})$.

Gabarito de algumas questões

1. $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\}$ e $D(g \circ f) = [1, \infty)$

2. a) Injetora e não sobrejetora. b) Não injetora e sobrejetora. c) Injetora e sobrejetora. d) Não injetora e não sobrejetora.

3.a) Injetora e sobrejetora. b) Não injetora e sobrejetora. c) Não injetora e sobrejetora.

5. a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$. b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x - 2)}$. c) $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. d) $p^{-1}(x) = -\sqrt{x - 1}$. e) $q^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

6. a) $x = -\frac{1}{4}$. c) $x = 1, -2$. g) $x = -1, 1, 2, 3$. h) $x = -1, 0, 1, 3, \frac{1}{2}$.

7. $\{m \in \mathbb{R} \colon m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m \geq 12\}$.

8. a) $\{x \in \mathbb{R} \colon x < -2 \text{ ou } x \geq 1\}$. b) $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 1\}$. c) $\mathbb{R}$

9. a)$\{x \in \mathbb{R} \colon 1 < x < 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$

13. a) $p(f) = 2\pi$, $Im(f) = [-2, 2]$. b) $p(g) = 2\pi$, $Im(g) = [0, 1]$. c) $p(h) = \pi$, $Im(h) = [-1, 1]$.d) $p(p) = 4\pi$, $Im(p) = [-1, 1]$. e) $p(q) = \frac{\pi}{2}$, $Im(q) = [-3, 3]$. f) $p(k) = 4\pi$, $Im(k) = [-1, 3]$.

14.$p(f) = \frac{2\pi}{c}$, $Im(f) = [a - b, a + b]$.

16.$sen(x) = -1, \frac{4}{5}, cos(x) = 0, -\frac{3}{5}$.

17. $m = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}$.

19. $y = 1 - 2m^2, z = 1 - 3m^2$.

20. a) $cos(x)$. b)$-cos(x)$. c) $-cos(x)$. d) $-cos(x)$. e) $-sen(x)$. f) $sen(x)$.

25. a) $y = 2sen(4x)cos(x)$. b) $y = 2cos(2x)cos(x)$. c) $y = 4cos(a)sen(2a)cos(4a)$. d) $y = -4cos(2a)sen(4a)sen(3a)$. e) $y = 4sen(\frac{a+b}{2})sen(\frac{a+c}{2})sen(\frac{b+c}{2})$.