Lista de Exercícios para Avaliação

① Num espaço-tempo curvo, a aceleração relativa entre geodésicas vizinhas separadas, por um vetor δx^a, é determinada pelo tensor de Riemann de modo que

$$u^a \nabla_a (u^b \nabla_b \delta x^d) = -R_{abc}{}^d u^a \delta x^b u^c,$$

onde u^a é a 4-velocidade das geodésicas.

(a) Mostre que em *gravitação newtoniana* a aceleração relativa entre trajetórias vizinhas em "queda livre", separadas por um vetor $\delta\vec{x}$, sujeitas apenas ao potencial gravitacional $\phi(x)$, é dada por

$$\delta\vec{a} = -(\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi$$

(ou, usando índices, $\delta a^j = -(\partial_k \partial^j \phi)\delta x^k$ – lembre-se que, em gravitação newtoniana, $\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi$);

(b) O resultado acima sugere a associação $\partial_j \partial^k \phi \leftrightarrow R_{ajc}{}^k u^a u^c$ entre gravitação newtoniana e Relatividade Geral (no limite não-relativístico). Usando que $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ na teoria newtoniana, onde G é a constante da gravitação universal e ρ é a densidade de massa que gera o campo gravitacional, mostre que a equação relativística

$$R_{ab} = 4\pi G[\alpha T_{ab} + (1-\alpha) T g_{ab}]$$

possui o limite não-relativístico correto para *todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, onde $R_{ab} := R_{acb}{}^c$, T_{ab} é o tensor energia-momentum-estresse que descreve a fonte de gravitação e $T := g^{ab}T_{ab}$;

(c) Rescreva a equação dada no item anterior na forma $G_{ab}(\alpha) = 4\pi G T_{ab}$, determinando $G_{ab}(\alpha)$ apenas em termos de tensores geométricos e de α. Em seguida, determine, *justificando*, o valor de α de modo que a conservação covariante de T_{ab} (ou seja, $\nabla_a T^{ab} = 0$) seja consequência dessa equação.

② Num dos exercícios dados ao longo do semestre, mostrou-se que o espaço-tempo nas imediações de um corpo esférico de massa M pode ser aproximado por

$$ds^2 = -(1+2\Phi)\,dt^2 + (1-2\Phi)\,(dx^2+dy^2+dz^2),$$

com $\Phi = -GM/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (no regime em que $|\Phi| \ll 1$).

(a) Mostre que esse mesmo elemento-de-linha pode ser colocado na forma

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2+(1-2\phi)dr^2+r^2d\theta^2+r^2(\sin\theta)^2d\varphi^2, \quad |\phi| \ll 1,$$

onde $\phi = -GM/r$. Deixe clara a relação entre r e x, y, z, sendo consistente com as ordens de aproximação;
(**Atenção**: Note que o fator $1 - 2\phi$ multiplica apenas dr^2 nas novas coordenadas. Logo, r *não* é meramente $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. A coordenada r é chamada "coordenada radial *areal*", pois mesmo que não represente necessariamente a distância física ao logo da direção radial – assim como $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ também *não* representa –, a *área* de esferas com r = constante vale $4\pi r^2$ – tente entender por que.)

(b) Considerando que órbitas circulares podem ser aproximadas pelas órbitas newtonianas, calcule a relação entre a passagem do tempo a bordo de um satélite numa órbita de raio R_o e o tempo na superfície da Terra (com raio $R_\oplus$ – despreze o movimento de rotação da Terra);

(c) A título de curiosidade, separe o efeito anterior numa parte devida apenas ao campo gravitacional (Relatividade Geral) e noutra devida à velocidade do satélite (Relatividade Restrita). Qual o valor de R_o no qual esses efeitos têm a mesma importância? Considerando que os satélites da constelação GPS orbitam num raio $R_o \approx 4R_\oplus$, qual desses efeitos é mais importante nesse caso?

③ Considere um raio de luz se propagando no espaço-tempo do exercício anterior, nas coordenadas $\{(t, x, y, z)\}$. Calcule a deflexão sofrida pelo raio de luz ao passar nas imediações do Sol, usando o roteiro indicado nos itens abaixo:

(a) Mostre que a equação da geodésica para esse raio, no regime de gravidade linearizada, implica em

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2\vec{\nabla}\Phi + 4(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\Phi)\vec{V},$$

onde $\vec{V} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$;

(b) Resolva a EDO acima, obtendo a solução geral

$$\vec{V}(t) = [1 + 4\Phi(t) - 4\Phi_0]\vec{V}_0 - 2\int_{t_0}^{t} dt'\,(\vec{\nabla}\Phi)(t'),$$

onde $\Phi(t) := \Phi(x(t), y(t), z(t))$, $(\vec{\nabla}\Phi)(t) := (\vec{\nabla}\Phi)(x(t), y(t), z(t))$, $\Phi_0 := \Phi(t_0)$ e $\vec{V}_0 = \vec{V}(t_0)$;

(c) Calcule a deflexão α indicada na Fig. 1, como função de M e b. Em seguida, aplique o resultado para um raio de luz vindo do infinito passando rasante ao Sol. (**Sugestão**: Resolva *iterativamente* a expressão acima, lembrando que desejamos apenas efeitos de primeira ordem em Φ.)

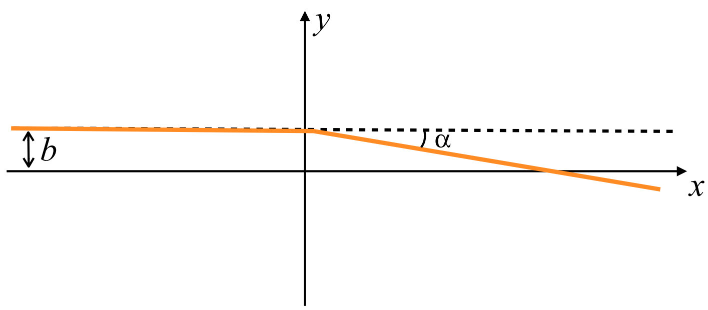

Figura 1: Deflexão de raio de luz.

④ Sendo u^μ as componentes da 4-velocidade de uma partícula livre, com velocidade *arbitrária*, no espaço-tempo do exercício ② em coordenadas $\{(t, r, \theta, \varphi)\}$, pede-se:

(a) Mostre que $u_0 = g_{0\mu}u^\mu$ e $u_3 = g_{3\mu}u^\mu$ são constantes de movimento;

(b) Mostre que sempre podemos escolher as coordenadas $\{(\theta, \varphi)\}$ de modo que o movimento de uma partícula livre tenha $\theta =$ constante. Qual o valor dessa constante?

(c) Obtenha uma equação formalmente análoga à de "conservação de energia",

$$\frac{1}{2}\dot{r}^{\,2} + V(r) = E,$$

onde $\dot{r} = dr/d\lambda$ (com λ sendo o tempo próprio no caso tipo-tempo e apenas um parâmetro afim no caso tipo-luz), E é uma constante e $V(r)$ é uma função (a ser determinada) apenas da coordenada radial r (mas dependente de outros parâmetros constantes); (**Sugestão**: use os resultados dos itens anteriores no vínculo que 4-velocidades devem satisfazer em cada caso: tipo-tempo e tipo-luz.)

(d) Com a ajuda da equação do item anterior, calcule o período (na coordenada t) de uma órbita *circular* de raio $r = r_0$, deixando clara a correção relativística em comparação com o resultado newtoniano;

(e) Considerando órbitas ligeiramente perturbadas em relação às circulares ($r(\lambda) = r_0 + \delta r(\lambda)$, com $|\delta r(\lambda)| \ll r_0$), obtenha a precessão (ângulo por unidade de "tempo") do periastro dessa órbita; (**Sugestão**: a partir da equação do item (c), obtenha uma equação "tipo oscilador harmônico" para a perturbação $\delta r(\lambda)$, calcule a frequência dessa oscilação e compare com a frequência do movimento angular. Certifique-se de fazer todas as comparações de frequência e período usando a mesma "variável temporal".)

⑤ Considerando o efeito da rotação da Terra no seu campo gravitacional e fazendo uso da analogia com eletromagnetismo, *estime* a ordem de grandeza da mudança fracional no raio de órbitas equatoriais devido a esse efeito (para órbitas com a mesma velocidade).

⑥ Uma partícula clássica com massa m, carga elétrica q e spin $\vec{S}$ possui momento de dipolo magnético dado por $\vec{\mu} = q\vec{S}/(2m)$. Quando sujeita a um campo magnético $\vec{B}$, o spin dessa partícula precessiona de acordo com a equação

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

de onde segue que a velocidade angular de precessão é dada por $\Omega = qB/(2m)$.

(a) Com base na analogia de gravitomagnetismo, encontre (argumentando) a equação análoga para o spin $\vec{S}$ de um giroscópio sujeito a um campo gravitomagnético $\vec{B}_g$;

(b) *Estime* a ordem de grandeza da velocidade angular de precessão de um giroscópio nas imediações da Terra devido ao efeito gravitomagnético gerado por sua rotação.

⑦ A figura abaixo representa um sistema auto-gravitante *newtoniano* de duas massas, M e m, ambas em órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema, a uma distância L uma da outra.

(a) Calcule os momentos de dipolo e de quadrupolo de massa desse sistema (incluindo suas dependências temporais) na aproximação

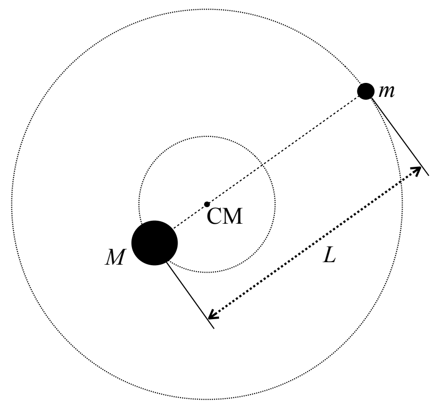

Figura 2: Sistema auto-gravitante assimétrico

em que ambas as massas são puntuais; (Adote o sistema de coordenadas cartesianas inerciais que julgar mais conveniente para os cálculos.)

(b) Mostre que a frequência da onda gravitacional emitida por esse sistema é o dobro da frequência do movimento orbital;

(c) Usando o sistema acima como uma aproximação para o sistema Terra-Lua, *estime* a ordem de grandeza da mudança na distância Terra-Lua – deixando claro se aumentaria ou diminuiria –, ao longo de 10 bilhões de anos, caso essa mudança se devesse apenas à emissão de ondas gravitacionais. Além disso, *estime* a ordem de grandeza da amplitude dessa onda gravitacional a 1 unidade astronômica de distância.

⑧ Um sistema binário de estrelas, com massas da ordem da do nosso Sol, emite ondas gravitacionais numa taxa que faz com que o período de seu movimento orbital se altere em algo da ordem de segundos a cada ano (terrestre). *Estime* a ordem de grandeza da separação entre as estrelas nesse sistema binário e do período de seu movimento orbital.

⑨ Considere uma onda gravitacional dada, num sistema de coordenadas $\{(t, x, y, z)\}$, por

$$h_{\mu\nu} = \left(\delta^1_\mu \delta^1_\nu - \delta^2_\mu \delta^2_\nu\right) A \sin[\omega(t-z)],$$

onde $A \ll 1$ e $\omega > 0$ são constantes e a métrica do espaço-tempo é dada por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

(a) Mostre que $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) =$ constante são geodésicas desse espaço-tempo e calcule a aceleração relativa entre geodésicas “vizinhas”, separadas por $\delta x^j = (\delta x, \delta y, \delta z) =$ constante;

(b) Considere que no instante $t = 0$, dois raios de luz são emitidos de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, um na direção x e outro na direção y. Esses raios são refletidos em espelhos localizados em $(x, y, z) = (L, 0, 0)$ e $(x, y, z) = (0, L, 0)$, retornando ao ponto inicial, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Calcule o intervalo de tempo (em primeira ordem em $A \ll 1$) entre as chegadas dos raios de luz de volta ao ponto inicial.

⑩ A figura a seguir esboça as curvas de sensibilidade de diferentes observatórios de ondas gravitacionais: LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*), aLIGO (*advanced* LIGO), eLISA (*evolved Laser Interferometer Space Antenna*) e EPTA (*European Pulsar Timing Array*). Considerando o sistema binário descrito no exercício ⑧, pergunta-se:

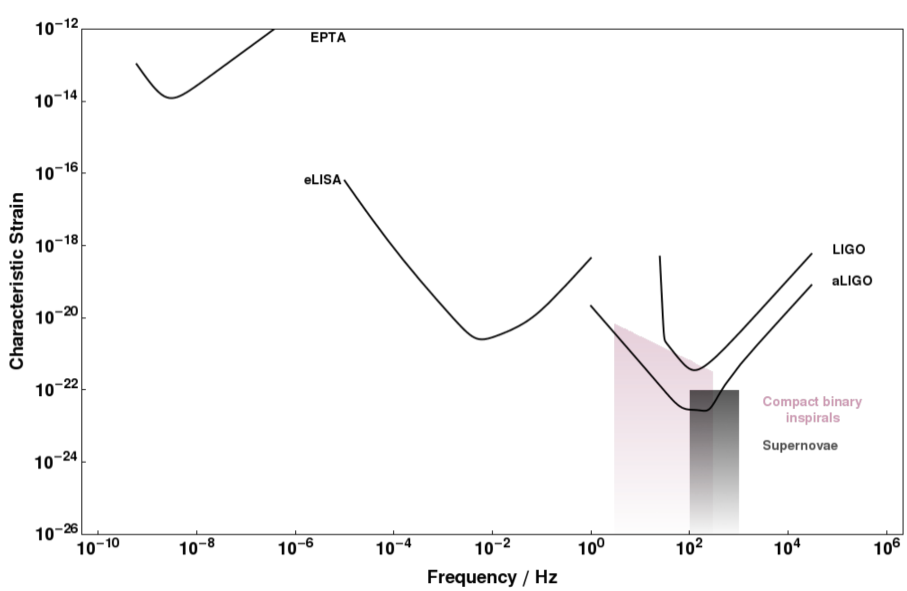

Figura 3: Curvas de sensibilidade de diferentes detectores de ondas gravitacionais.

(a) Qual dos observatórios é o mais apropriado para detectar suas ondas gravitacionais? Por que?

(b) *Estime* a distância máxima que esse sistema teria que estar da Terra para que houvesse chance de se detectar suas ondas gravitacionais. (Considere que *characteristic strain* mede a amplitude da onda gravitacional.)