Lista de exercícios - Relações, funções e suas equações

19 de maio de 2021

1. Dados os conjuntos

$$A = \{1, 3, 4\} \quad B = \{-2, 1\} \quad C = \{-1, 0, 2\},$$

represente pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

a) $A \times B$ = $\{(1,-2), (1,1), (3,-2), (3,1), (4,-2), (4,1)\}$

b) $B \times A$

c) $A \times C$

d) $C \times A$

e) $B \times B$ = $B^2 = \{(-2,-2), (-2,1), (1,-2), (1,1)\}$

f) $C \times C$

2. Sejam A, B, C conjuntos tais que $A \subset B \subset C$. Estabeleça as relações de inclusão entre os conjuntos $A \times A$, $A \times B$, $A \times C$, $B \times A$, $B \times B$, $B \times C$, $C \times A$, $C \times B$ e $C \times C$.

3. Seja A um conjunto tal que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subseteq A \times A$. Suponha que $A \times A$ tenha 9 elementos. Encontre todos os elementos do conjunto A^2.

4. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja $R \subsetneq A \times A$ a relação binária dada por

$$R = \{(a, b) \in A \times A \colon \mathrm{mdc}(a, b) = 2\}.$$

a) Encontre todos os elementos de R e represente R no plano cartesiano.

b) Encontre o domínio e a imagem de R.

5. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} \colon -2 \leq x \leq 5\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} \colon -2 \leq y \leq 3\}$. Considere as relações $R, S \subset A \times B$ definidas por

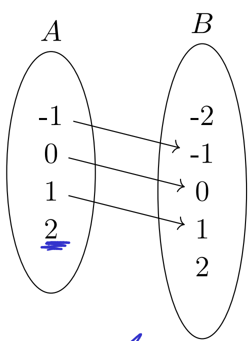
$$(x, y) \in R \Leftrightarrow 2 \text{ divide } (x - y)$$
$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (x - 1)^2 = (y - 2)^2.$$

a) Encontre todos os elementos de R e S e represente as relações no plano cartesiano.

b) Encontre o domínio e a imagem das relações R e S.

6. Sejam $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Estabeleça se cada uma das relações abaixo define ou não uma função de A em B. Justifique.

a) Relação 1



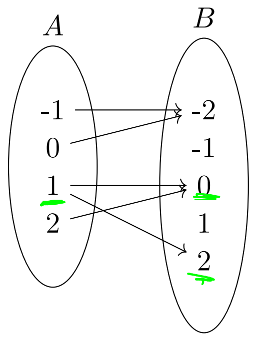
$R \subseteq A \times B$

R é função se

• para todo $a \in A$, existe única $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

Não é função

b) Relação 2 → não é função

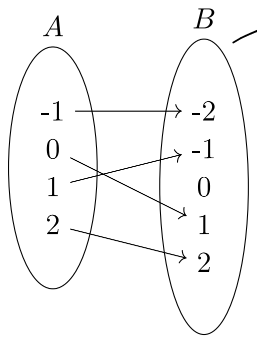


$R \subseteq A \times B$

R é função se

• para todo $a \in A$, existe única $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

c) Relação 3

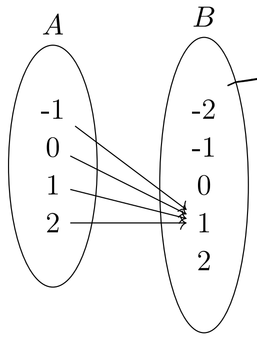


→ É função

$D(R_3) = A$

$Im(R_3) = \{-2, -1, 1, 2\}$
$= B \setminus \{0\}$

d) Relação 4



→ É função

7. Encontre o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

d) $p(x) = \sqrt{x-1}$

e) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

f) $r(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

h) $t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$

i) $u(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x-3}$

8. Sejam $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \frac{4x-1}{2}$ definidas em $\mathbb{R}$. Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

a) $f(x) \geq g(x)$

b) $g(x) < h(x)$

c) $f(x) \geq h(x)$

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $(3x + 3) \cdot (5x - 3) > 0$

b) $(5x + 2) \cdot (2 - x) \cdot (4x + 3) > 0$

c) $(5 - 3x) \cdot (7 - 2x) \cdot (1 - 4x) \leq 0$

10. Resolva o sistema

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$$
$$xy = 12.$$

11. Determine os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

12. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m-1)x + (m-2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

13. Sejam $ax^2 + bx + c$ função quadrática e $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ suas raízes. Mostre que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

14. Dentre todos os números reais cuja soma é 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

15. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

    a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

    b) $-x^2 + x + 6 > 0$

    c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

    d) $x^2 + 3x + 7 > 0$

16. Resolva a inequação $(x^2 - x - 2) \cdot (-x^2 + 4x - 3) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Gabarito

1. a) $A \times B = \{(1,-2),(1,1),(3,-2),(3,1),(4,-2),(4,1)\}$

b) $B \times A = \{(-2,1),(1,1),(-2,3),(1,3),(-2,4),(4,1)\}$

c) $A \times C = \{(1,-1),(1,0),(1,2),(3,-1),(3,0),(3,2),(4,-1),(4,0),(4,2)\}$

3. $A \times A = \{(1,1),(1,4),(1,2),(4,1),(4,4),(4,2),(2,1),(2,4),(2,2)\}$

4. a) $R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,6),(6,2),(6,4)\}$

b) $D(R) = Im(R) = \{2,4,6\}$

6. a) Não é função

b) Não é função

c) É função

d) É função

7. a) $D(f) = \mathbb{R}$

d) $D(p) = [1, \infty)$

g) $D(g) = \mathbb{R}$

8. a) $[-\frac{1}{5}, \infty)$

9. a) $(\frac{3}{5}, \infty) \cup (-\infty, -1)$

14. Os números $(4,4)$ somam 8 e maximizam o produto.

Árvore de continência

$A \subseteq B \subseteq C$

$$A\times A \xrightarrow{\subseteq} A\times B \xrightarrow{\subseteq} B\times B \to B\times C \to C\times C$$
$$A\times A \xrightarrow{\subseteq} A\times C \xrightarrow{\subseteq} B\times C \to C\times C$$
$$A\times A \to B\times C$$

$2 \Rightarrow 4$

3- $D=\{a,b\} \Rightarrow D\times D=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

$D=\{a,b,c\} \Rightarrow D\times D=\{(a,a),(a,b),(a,c)$
$(b,a),(b,b),(b,c)$
$(c,a),(c,b),(c,c)\}$

$3 \Rightarrow 9$

$\{(1,2),(4,2)\} \subseteq A\times A$

$A\times A$ tem 9 elementos $\Rightarrow$ A tem 3 elementos

$\to \{1,2,4\} \subseteq A$

$A=\{1,2,4\}$

$\Rightarrow A^2=\{(1,1),(1,2),(1,4)$
$(2,1),(2,2),(2,4)$
$(4,1),(4,2),(4,4)\}$

— " —

4- $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$R=\{(a,b)\in A\times A:\ mdc(a,b)=2\}$ $\to$ Simétrico

$(a,b)\in R$
$\Rightarrow (b,a)\in R$

a) $R=\{(2,2),(2,4),(2,6)$
$\to (4,2),(6,2),(4,6)$
$(6,4)\}$

b) $D(R)=\{2,4,6\}$

$Im(R)=\{2,4,6\}$

$R\subseteq A\times B$

$\subseteq A$

$D(R)=\{a\in A:\ \exists b\in B\ (a,b)\in R\}$

$Im(R)=\{b\in B:\ \exists a\in A\ (a,b)\in R\}$

$\cap$

B

9- b) $f(x)=(5x+2)(2-x)\cdot(4x+3)>0$

$5x+2$: $-$ o $+$ ($-2/5$)

$2-x$: $+$ o $-$ (2)

$4x+3$: $-$ o $+$ ($-3/4$)

$-$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$	$+$

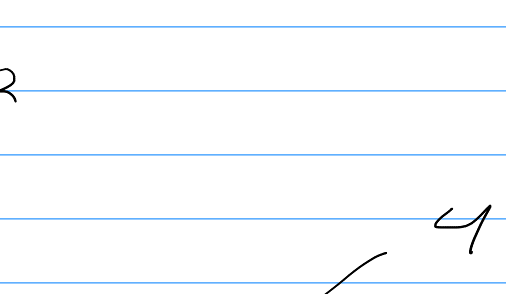
$\to$ Variação do sinal de f

$f>0$ $\quad -3/4 \quad$ $f<0$ $\quad -2/5 \quad$ $f>0$ $\quad 2 \quad$ $f<0$

$\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)>0\}=(-\infty,-3/4)\cup(-2/5,2)$

7. i) $U(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x-3}$

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f(-1)=-1$



$D(U)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$D(f)=\mathbb{R}$

11- $f(x)=x^4-3x^2-4$ $\quad \underline{z=x^2}$

$g(z)=z^2-3z-4$

$z=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-4)}}{2}=\dfrac{3\pm5}{2}$ $\quad 4,\ -1$

Voltando para $f(x)$

$x^2=z$ $\quad 4,\ \cancel{-1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=2,-2}$

13- $f(x)=ax^2+bx+c$, $\quad f(x_1)=f(x_2)=0$

$x_i=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_1+x_2=\dfrac{-b+\cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}+\dfrac{-b-\cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}$

$=-\dfrac{b}{a}$

$\to (x+y)(x-y)=x^2-y^2$

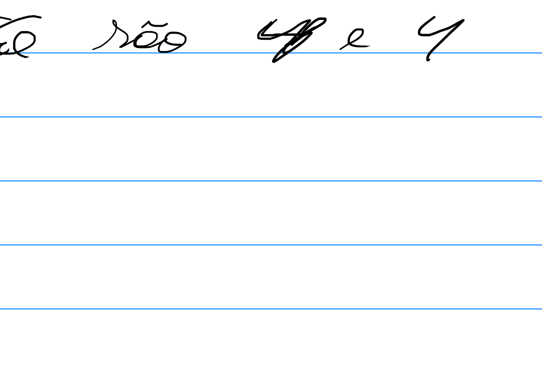
$x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{(2a)^2}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)$

$=\dfrac{1}{(2a)^2}\left[\cancel{b^2}-(\cancel{b^2}-4ac)\right]=\dfrac{\cancel{4}a c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}=\dfrac{c}{a}$

14- $x+y=8$, maximizar $\overbrace{x\cdot y}^{z}$

$z=x\cdot y=x(8-x)=-x^2+8x$

$\Rightarrow$ Vértice $=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{8}{2\cdot(-1)}$
$=4$



$\Rightarrow$ Os valores que somam 8 e maximizam o produto são ~~4~~ 4 e 4