- Como

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)},$$

$$T(j\omega) \simeq G(j\omega)K(j\omega)$$

- Então a condição

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{1+\ell_m(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

pode ser reescrita de forma aproximada como

$$\boxed{|T(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{1+\ell_m(\omega)}} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA ($H_\infty$)

- **NOTA**

Ver Notas de Aula para dedução usando argumentos geométricos.

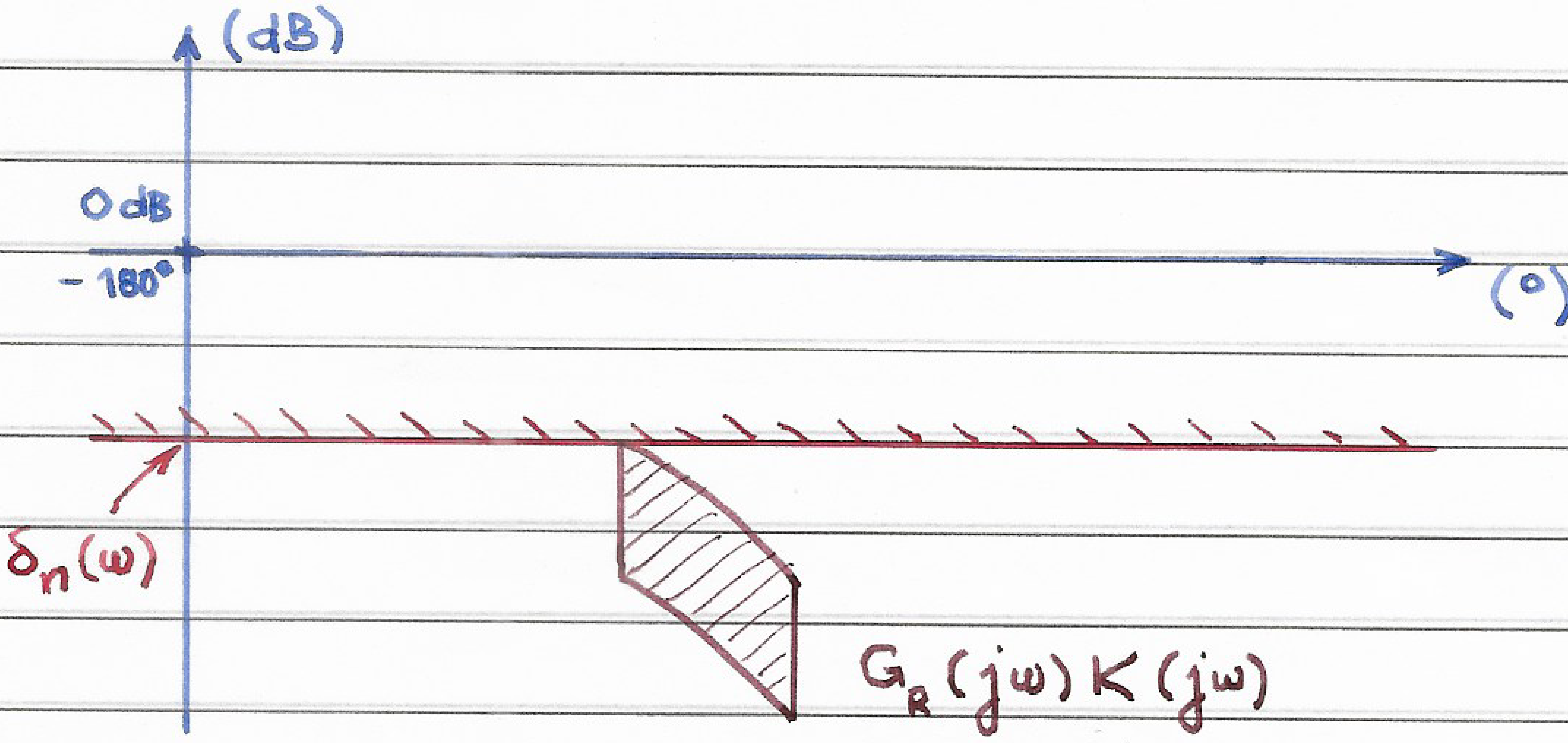
## 5.3.2 - INCERTEZA REPRESENTADA POR TEMPLATES

- Condição:

$$|G_R(j\omega)K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$(\forall G_R$ admissível$)$

- Graficamente:



## 5.4 ESFORÇO DE CONTROLE

- Condição nominal :

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = |K(j\omega)\, S(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

- Condição robusta :

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = |K(j\omega)\, S_R(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$$(\forall\, G_R \text{ admissível})$$

$$S_R(j\omega) = \frac{1}{1 + G_R(j\omega) K(j\omega)}$$

### 5.4.1 - INCERTEZA MULTIPLICATIVA

- PARA $H_\infty$

- $$\frac{|K(j\omega)|}{|1 + G_R(j\omega) K(j\omega)|} \leq \delta_u(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$$(\forall\, G_R \text{ admissível})$$

- Denominador :

$$|1 + G_R(j\omega) K(j\omega)| = |1 + \underbrace{[1 + \Delta m(j\omega)]\, G(j\omega)}_{G_R(j\omega)} K(j\omega)| =$$

$$= |1 + G(j\omega) K(j\omega) + \Delta_m(j\omega) G(j\omega) K(j\omega)| =$$

$$= \left| [1 + G(j\omega) K(j\omega)] \left[ 1 + \Delta_m(j\omega) \underbrace{\frac{G(j\omega) K(j\omega)}{1 + G(j\omega) K(j\omega)}}_{T(j\omega)} \right] \right| =$$

$$= |[1 + G(j\omega) K(j\omega)][1 + \Delta_m(j\omega) T(j\omega)]| =$$

$$= |1 + G(j\omega)K(j\omega)|\,|1+\Delta_m(j\omega)T(j\omega)| \geq$$

$$\geq |1 + G(j\omega)K(j\omega)|\left[1 - |\Delta_m(j\omega)T(j\omega)|\right] \quad (*)$$

- Mas :

$$|\Delta_m(j\omega)T(j\omega)| = |\Delta_m(j\omega)|\cdot|T(j\omega)| \leq \ell_m(\omega)\cdot|T(j\omega)|$$

$$\therefore -|\Delta_m(j\omega)T(j\omega)| \geq -\ell_m(\omega)\cdot|T(j\omega)| \Rightarrow$$

$$1 - |\Delta_m(j\omega)T(j\omega)| \geq 1 - \ell_m(\omega)\,|T(j\omega)| > 0$$

pq. $\ell_m(\omega)\,|T(j\omega)| < 1$ ($\forall\omega$)
(COND. DE ROBUSTEZ DA ESTAB.)

- Portanto, de $(*)$ :

$$|1 + G_R(j\omega)K(j\omega)| \geq |1+G(j\omega)K(j\omega)|\cdot\left[1-\ell_m(\omega)|T(j\omega)|\right] > 0$$

- Invertendo :

$$\frac{1}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \frac{1}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|\left[1-\ell_m(\omega)|T(j\omega)|\right]}$$

- Multiplicando por $|K(j\omega)|$ :

$$\frac{|K(j\omega)|}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \frac{|K(j\omega)|}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|\left[1-\ell_m(\omega)|T(j\omega)|\right]} =$$

$$= \frac{|K(j\omega)S(j\omega)|}{1-\ell_m(\omega)|T(j\omega)|}$$

- Portanto para que

$$\frac{|K(j\omega)|}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_u(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n) \; (\forall G_R \text{ admissível})$$

é suficiente que

$$\frac{|K(j\omega)S(j\omega)|}{1-\ell_m(\omega)|T(j\omega)|} \leq \delta_u(\omega) \qquad (*) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

- Se temos uma especificação de rejeição do erro de medida com tolerância $\delta_n(\omega)$ para $\omega \in \Omega_n$:

$$|T(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{1+\ell_m(\omega)}$$

e se $\ell_m(\omega) >> 1$, podemos aproximar:

$$|T(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{\ell_m(\omega)}$$

Portanto:

$$\ell_m(\omega) \cdot |T(j\omega)| \leq \delta_n(\omega)$$

e, como $\delta_n(\omega) << 1$ em geral, resulta que

$$\ell_m(\omega)|T(j\omega)| << 1 \Rightarrow 1-\ell_m(\omega)|T(j\omega)| \simeq 1.$$

- Portanto, (*) pode ser aproximada por:

$$\boxed{|K(j\omega)S(j\omega)| \leq \delta_u(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE ($H_\infty$)
(NOTA: IGUAL À CONDIÇÃO NOMINAL)

- PARA LOOP SHAPING

  - Para $\omega \in \Omega_n$, para atender aos requisitos de robustez da estabilidade e da rejeição do erro de medida:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

  - Portanto:

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \simeq 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

  - Logo:

$$|K(j\omega)S(j\omega)| \simeq |K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

  - Multiplicando por $|G(j\omega)|$:

$$\boxed{|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega)\,|G(j\omega)|} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE (LOOP SHAPING)
(NOTA: IGUAL À CONDIÇÃO NOMINAL)

## 5.4.2 - INCERTEZA REPRESENTADA POR TEMPLATES

- Condição robusta:

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = |K(j\omega)\, S_R(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n) \quad (\forall G_R \text{ admissível})$$

- Para a rejeição do erro de medida:

$$|G_R(j\omega)\, K(j\omega)| \ll 1 \qquad (\omega \in \Omega_n) \quad (\forall G_R \text{ admissível})$$

e, portanto:

$$S_R(j\omega) \simeq 1 \qquad (\omega \in \Omega_n) \quad (\forall G_R \text{ admissível})$$

- Logo:

$$|K(j\omega)\, S_R(j\omega)| \simeq |K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega)$$

- Multiplicando por $|G(j\omega)|$:

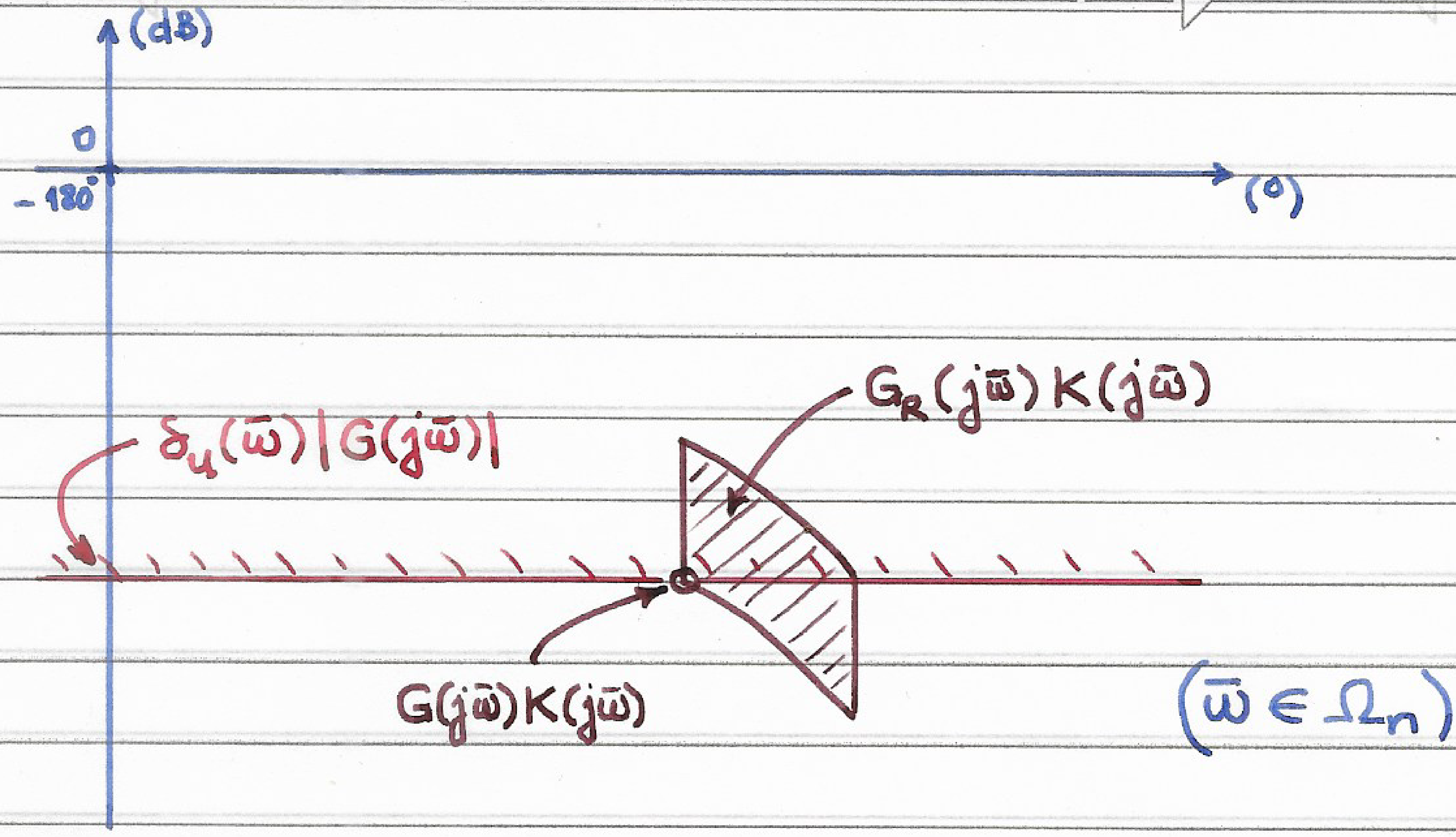
$$\boxed{|G(j\omega)\, K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega)\, |G(j\omega)|} \qquad (\omega \in \Omega_n$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE (TEMPLATES)

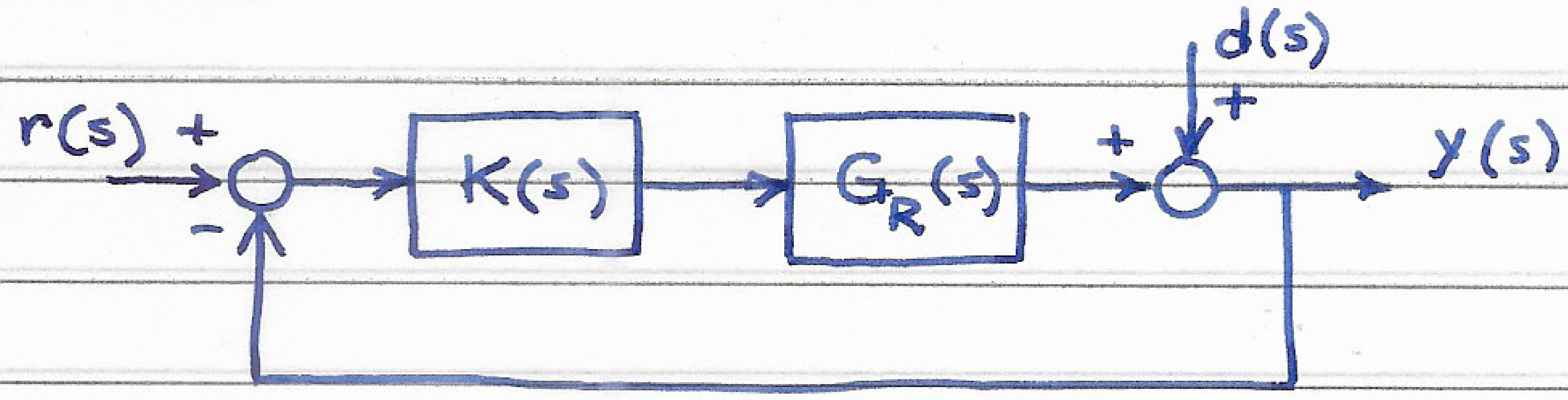
- NOTA

A condição independe de $G_R$!

Depende apenas de G nominal.




## 5.5. ERRO ESTACIONÁRIO




- Entrada:
  - degrau unitário
  - rampa unitária

- Perturbação:
  - análogo

- Vamos considerar apenas os casos em que o erro estacionário é não nulo

- Quando há polos na origem em número suficiente, o erro estacionário é nulo para as malhas "reais"

## 5.5.1 - INCERTEZA MULTIPLICATIVA

### ENTRADA DEGRAU UNITÁRIO

- $H_\infty$

- Hipótese:

$$G_R(s)K(s) \text{ do Tipo } 0 \qquad (\forall G_R \text{ admissíveis})$$

- Entrada degra unitário:

$$r(s) = \frac{1}{s}$$

- Teorema do Valor Final:

$$e_{ss} = \lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\, e(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{1}{1+G_R(s)K(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} =$$

TIPO 0

$$= \frac{1}{1+G_R(0)K(0)}$$

- Especificação:

$$|e_{ss}| \leq \delta_{ss}$$

$$\therefore \frac{1}{|1+G_R(0)K(0)|} \leq \delta_{ss} \qquad (\forall G_R \text{ admissíveis})$$

- Desigualdade com a mesma forma daquela da robustez do acompanhamento da referência:

$$\frac{1}{|1+G_R(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\forall G_R \text{ admissível})$$

que levou a:

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(\omega)]\,\delta_r(\omega)}$$

após supormos que:

$$\ell_m(\omega) < 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

- Portanto, supondo:

$$\ell_m(0) < 1$$

podemos escrever:

$$|1+G(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}$$

- Ou seja:

$$\frac{1}{|S(j0)|} \geq \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}$$

- Portanto:

$$\boxed{|S(j0)| \leq [1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ERRO ESTACIONÁRIO PARA SISTEMA DO TIPO 0 E ENTRADA DEGRAU UNITÁRIO ($H_\infty$)

## • LOOP SHAPING

$$|1+G(j0)K(j0)| \geqslant \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}$$

Normalmente

$$\delta_{ss} << 1$$

Portanto

$$|1+G(j0)K(j0)| >> 1$$

e podemos aproximar

$$\boxed{|G(j0)K(j0)| \geqslant \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}}$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ERRO ESTACIONÁRIO PARA SISTEMAS DO TIPO 0 E ENTRADA DEGRAU UNITÁRIO (LOOP SHAPING)

**NOTA**

Se $G(s)K(s)$ é da forma:

$$G(s)K(s) = K_0 \frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\dots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\dots(T_n s+1)}$$

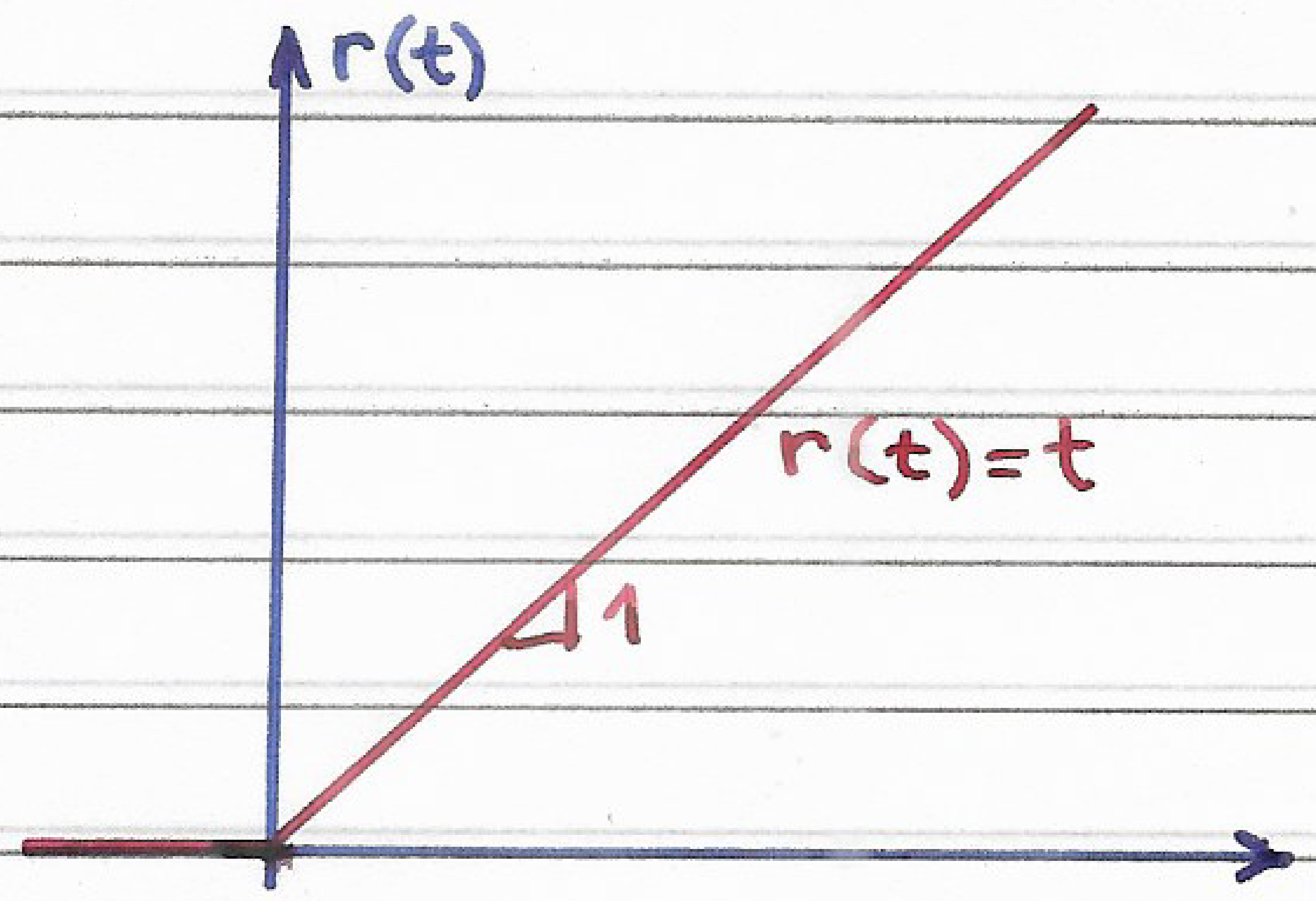
então

$$G(j0)K(j0) = K_0 \quad \text{(ganho de baixas frequências)}$$

e, portanto

$$\boxed{K_0 \geqslant \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}}$$

## • ENTRADA RAMPA UNITÁRIA




$$r(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Hipótese:

$$G_R(s)\,K(s) \text{ do Tipo } 1 \qquad (\forall G_R \text{ admissível})$$

- Teorema do Valor Final:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,e(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{1+G_R(s)K(s)}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{\underbrace{sG_R(s)}_{G_R'(s)}K(s)} = \frac{1}{G_R'(j0)K(j0)}$$

- Nota:

$$\text{Se } G_R(s) = K_0\,\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)} \Rightarrow$$

$$G_R'(s) = K_0\,\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

- Se a especificação para $e_{ss}$ é

$$|e_{ss}| < \delta_{ss}$$

então

$$\frac{1}{|G'_R(j0)K(j0)|} \leq \delta_{ss}$$

e, portanto,

$$\boxed{|G'_R(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}}$$

(Vamos usar mais adiante → TEMPLATES)

- Mas

$$\Delta_m(s) = \frac{G_R(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{sG_R(s) - sG(s)}{sG(s)} = \frac{G'_R(s) - G'(s)}{G'(s)}$$

$$\therefore\ G'_R(s) = [1 + \Delta_m(s)]\,G'(s)$$

- Assim

$$|[1 + \Delta_m(j0)]\,G'(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}$$

$$- \quad |1 + \Delta_m(j0)|\,|G'(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}$$

- Mas

$$|1 + \Delta_m(j0)| \geq 1 - |\Delta_m(j0)|$$

e $\quad |\Delta_m(j0)| \leq \ell_m(0)$

$$\therefore\ 1 - |\Delta_m(j0)| \geq 1 - \ell_m(0)$$

- Supondo $\ell_m(0) < 1$ :

$$1 - |\Delta_m(j0)| \geq 1 - \ell_m(0) > 0$$

- Portanto

$$|1+\Delta_m(j0)| \geq 1-\ell_m(0) > 0$$

e

$$|1+\Delta_m(j0)||G'(j0)K(j0)| \geq [1-\ell_m(0)]\,|G'(j0)K(j0)|$$

- Então, para que

$$|1+\Delta_m(j0)||G'(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}$$

é suficiente que

$$[1-\ell_m(0)]\,|G'(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}$$

- Por fim, como supusemos que $\ell_m(0)<1$,

$$\boxed{|G'(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}}$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DO ERRO ESTACIONÁRIO PARA SISTEMA DO TIPO 1 E ENTRADA RAMPA UNITÁRIA (LOOP SHAPING)

NOTA Se $G(s)K(s)$ é da forma:

$$G(s)K(s) = K_0\,\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

então

$$G'(j0)K(j0) = K_0$$

e, portanto,

$$\boxed{K_0 \geq \frac{1}{[1-\ell_m(0)]\,\delta_{ss}}}$$

## 5.5.2 - INCERTEZA REPRESENTADA POR TEMPLATES

### • ENTRADA DEGRAU UNITÁRIO

- Hipótese:

$G_R(s)K(s)$ do Tipo 0 $(\forall G_R$ admissível$)$

- Já vimos que:

$$|e_{ss}| = \frac{1}{|1+G_R(j0)K(j0)|}$$

- Especificação:

$$|e_{ss}| \leq \delta_{ss}$$

- Então:

$$\frac{1}{|1+G_R(j0)K(j0)|} \leq \delta_{ss} \quad (\forall G_R \text{ admissível})$$

e, portanto,

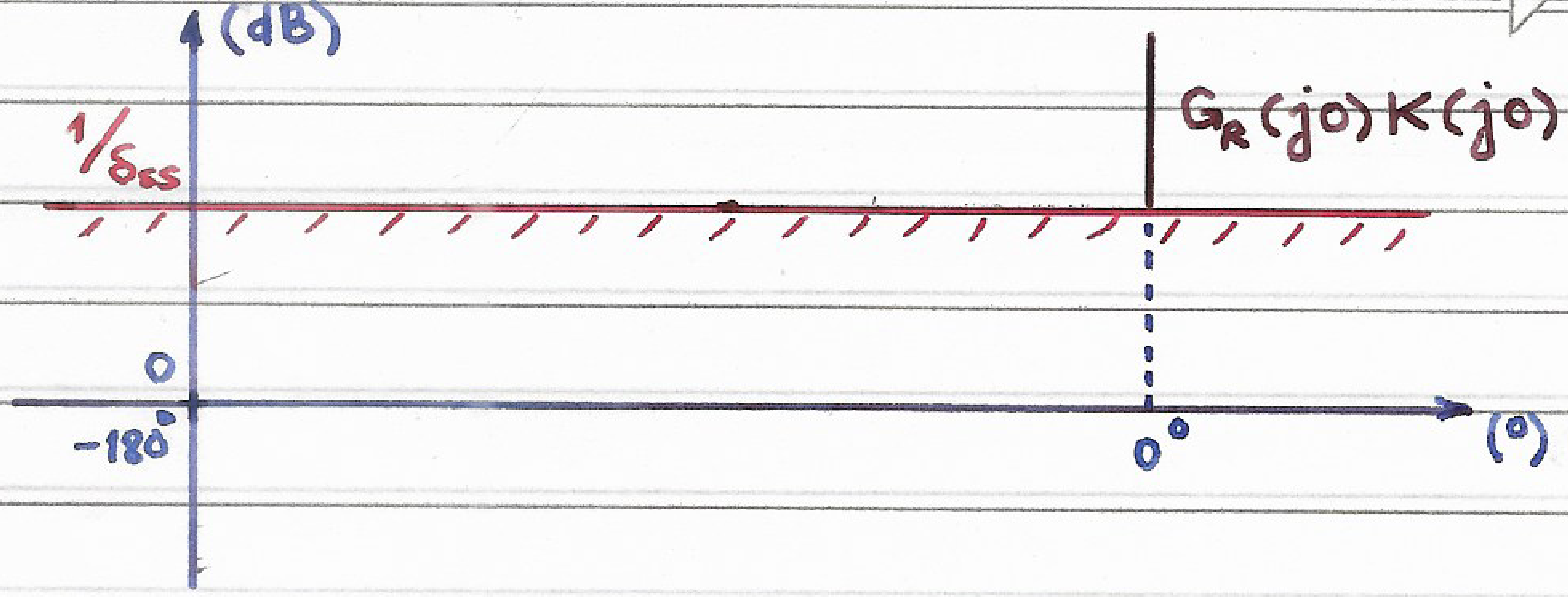
$$|1+G_R(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}} \quad (\forall G_R \text{ admissível})$$

- Como, em geral,

$$\delta_{ss} \ll 1$$

podemos aproximar:

$$\boxed{|G_R(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}} \quad (\forall G_R \text{ admissível})$$




- **ENTRADA RAMPA UNITÁRIA**

- Hipótese:

$G_R(s)K(s)$ do Tipo 1 $\quad (\forall G_R$ admissíveis$)$

- Vimos que:

$$\boxed{|G'_R(j0)K(j0)| \geq \frac{1}{\delta_{ss}}}$$