Projeto 3 - Análise Input-Output (Insumo-Produto)

1 Introdução

Em economia, um modelo input-output (insumo-produto) é uma técnica para representar as interdependências entre diferentes setores de uma economia nacional ou de economias regionais. O modelo descreve relações intersetoriais em uma economia, mostrando como a produção de um setor pode se tornar o insumo de outro setor. Por suas contribuiçoes ao desenvolvimento desta análise, o economista Wassily Leontief foi laureado com o prêmio Nobel de economia em 1973.

Leontief foi o primeiro a usar uma representação matricial para uma economia nacional (ou regional). Nesta matriz, os elementos de cada coluna representam insumos (*inputs*) a um setor da economia, enquanto que os elementos de cada linha representam produtos (*outputs*) de um dado setor. Este formato mostra portanto a interdependência entre os setores da economia, indicando para um setor tanto o seu papel de consumidor como de fornecedor relativamente a outros setores.

Em 1949 Leontief, então professor da Universidade de Harvard, EUA, usou o computador MARK II desta universidade para analisar informações sobre 500 setores da economia norte-americana. Para cada setor, ele escreveu uma equação linear descrevendo como o setor distribuía sua produção aos outros setores da economia. Como o MARK II, um dos maiores computadores da época, não tinha capacidade para lidar com um sistema de 500 equações e 500 incógnitas, Leontief condensou o problema em um sistema de 42 equações e 42 incógnitas.

A programação do computador MARK II para estas 42 equações requereu um esforço de várias semanas e o tempo de execução para a inversão da matriz foi de 56 horas! Este foi um dos acontecimentos pioneiros no uso de computadores para analisar um problema matemático de (na época) grande escala. Atualmente há mais recursos computacionais e conseqüentemente problemas de escalas bem maiores podem ser estudados.

2 Tabela de insumo-produto

Os dados anuais de uma economia podem ser apresentados de diversas maneiras e discutiremos aqui um formato simplificado assumindo uma consolidação preliminar de informações econômicas. Suponha que a economia de uma nação esteja dividida em n setores que produzem bens ou serviços e suponha também que uma outra parte da economia (chamada de *setor aberto*) não produza bens ou serviços, apenas os consome.

Se denotarmos por $\bar{x}_i$ a produção total anual do setor i e por $\bar{d}_i$ a demanda final anual do setor não produtivo por produtos do setor i, então podemos relacionar a maneira como o setor i distribui sua produção através de vendas para outros setores e para a demanda final por

$$\bar{x}_i = z_{i1} + z_{i2} + \cdots + z_{in} + \bar{d}_i \tag{1}$$

Os termos z_{ij} representam as vendas intersetoriais do setor i para todos os setores j (incluindo ele mesmo quando $j = i$). A relação (1) representa a distribuição da produção do setor i, havendo uma para cada setor. Estas informações podem ser convenientemente armazenadas em uma tabela de insumo-produto na forma

Setor	1	2	...	n	demanda	produção
1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}	$\bar{d}_1$	$\bar{x}_1$
2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}	$\bar{d}_2$	$\bar{x}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nn}	$\bar{d}_n$	$\bar{x}_n$

Em um mundo venal como o nosso, os dados acima são em geral apresentados em escalas adequadas de unidades monetárias. Por exemplo, milhões de reais no caso insumo-produto ou milhões de dólares no caso input-output.

Na tabela acima, a coluna

$$\mathbf{z_j} = \begin{bmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{bmatrix}$$

associada ao setor j também tem um significado relevante. Estes elementos indicam compras realizadas pelo setor j dos outros setores produtivos para a manufatura do seu produto. Ou seja, a coluna representa as fontes e magnitudes dos insumos do setor j.

3 O modelo de Leontief

Os valores z_{ij} representam as demandas intermediárias dos produtores por insumos para as suas próprias produções a fim de atender a demanda final de consumo. Como usar os dados anuais para *prever* a produção a fim de atender uma demanda final *futura* especificada?

As inter-relações entre os setores são muito complexas e a conexão entre a demanda final e a produção é pouco clara. Leontief perguntou se existe um equilíbrio entre o nível de produção e a demanda total de forma que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{produção} \\ \mathbf{x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{demanda} \\ \text{intermediária} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{demanda final} \\ \mathbf{d} \end{array} \right\}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor de produção, cuja componente i é a produção do setor i, e $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor de demanda final, cuja componente i é a demanda final pela produção do setor i.

Como o vetor $\mathbf{d}$ é especificado, procura-se uma relação entre a demanda intermediária e o vetor de produção $\mathbf{x}$. A *hipótese básica* de Leontief consiste em assumir que para cada setor produtivo o *valor dos insumos por unidade de valor produzido é constante*.

Logo, se definirmos o vetor de consumo por

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{z}_j/\bar{x}_j = \begin{bmatrix} z_{1j}/\bar{x}_j \\ z_{2j}/\bar{x}_j \\ \vdots \\ z_{nj}/\bar{x}_j \end{bmatrix},$$

então as demandas intermediárias de consumo do setor j associadas a uma produção cujo valor é x_j serão representadas por $x_j\mathbf{c}_j$ e a demanda total intermediária de todos os setores será igual a

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{c}_j = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n]$ é a **matriz de consumo**.

O equlíbrio entre o nível de produção e a demanda total é então equacionado por $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, ou seja, pelo sistema linear

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n. Por construção, se $d_i = \bar{d}_i$, $1 \leq i \leq n$, o sistema (2) admite a solução $x_i = \bar{x}_i$, $1 \leq i \leq n$. A questão é saber se há solução (que faça sentido econômico) para uma demanda especificada.

Isto remete a questões sobre a invertibilidade de $\mathbf{I} - \mathbf{C}$ e sobre propriedades de $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$, conhecida como **Matriz de Leontief**. Os seus coeficientes admitem uma interpretação econômica: l_{ij} lista a produção do setor i para atender a demanda final de uma unidade monetária do setor j. Explique por que.

4 Rentabilidade e existência do equilíbrio

Pela definição da matriz de consumo, a despeza total do setor j associada a uma produção de valor x_j é igual a $(c_{1j} + c_{2j} + \cdots + c_{nj})x_j$. Logo, se

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1, \tag{3}$$

então o custo total de produção será menor do que o valor do produto. Neste caso, diremos (obviamente) que o setor j é rentável.

Esquecendo momentaneamente a crise econômica, ou supondo um país ideal, vamos assumir que todos os setores da economia são rentáveis. Nesta situação podemos nos valer de um resultado de Álgebra Linear, de aparição freqüente em aplicações, cujo enunciado é:

> **Teorema.** Seja $\mathbf{C}$ uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais não negativos e tal que (3) valha para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Então a matriz $\mathbf{I} - \mathbf{C}$ é inversível e os coeficientes da sua inversa são não negativos.

Implicitamente em nossa discussão é assumido que os coeficientes da matriz de consumo são não negativos. O resultado nos diz então que o sistema (2) tem solução única e que, se a demanda final de cada setor for positiva, então o valor da sua produção será também positivo.

5 Exemplo

Suponha que a economia é formada por três setores — manufatura, agricultura e serviços — com vetores de consumo $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$ definidos na tabela abaixo.

	Manufatura	Agricultura	Serviços
Manufatura	0.50	0.40	0.20
Agricultura	0.20	0.30	0.10
Serviços	0.10	0.10	0.30
	↑	↑	↑
	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{c_3}$

A matriz de consumo é

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.40 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.10 \\ 0.10 & 0.10 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Para produzir 100 unidades (monetárias), o setor de manufatura irá pedir e consumir 50 unidades de outras partes do setor de manufatura, 20 unidades da agricultura e 10 unidades de serviços, conforme o resultado de $100 \times \mathbf{c_1}$.

Se o vetor de demanda final for de 50 unidades monetárias para manufatura, 30 unidades para agricultura e 20 unidades para serviços, o nível de produção

$\mathbf{x}$ que satisfaz esta demanda será solução de (conforme (2))

$$\begin{bmatrix} 0.50 & -0.40 & -0.20 \\ -0.20 & 0.70 & -0.10 \\ -0.10 & -0.10 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $\mathbf{x} \approx [226, 119, 78]^T$ (exercício). Ou seja, aproximadamente o setor de manufatura deverá produzir 226 unidades (monetárias), o de agricultura 119 unidades e o de serviços 78 unidades.

Diversos estudos sobre relações intersetoriais usam a matriz $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$ para extrair indicadores econômicos. Aqui há um conflito entre o matemático e o usuário dos dados. Um analista numérico raramente inverte uma matriz, priorizando a resolução de sistemas lineares. Porém não se pode exigir de um profissional sem treino matemático que use um algorimtmo para resolução de sistemas lineares cada vez que precisar de uma informação.

A multiplicação de matriz por vetores é algo que todo mundo aprende na escola e facilmente executável em uma planillha. Para problemas pequenos, isto não é uma grande dificuldade, mas para problemas de grande porte técnicas computacionais mais eficientes devem ser usadas.

6 Tarefas

1) Considere uma economia dividida em três setores — manufatura, agricultura e serviços. Para cada unidade produzida, a manufatura requer 0.10 unidades de outras companhias do mesmo setor, 0.30 unidades da agricultura e 0.30 unidades de serviços. Para cada unidade produzida, a agricultura usa 0.20 unidades da sua própria produção, 0.60 unidades da manufatura e 0.10 unidades de serviços. Para cada unidade produzida, o setor de serviços consome 0.10 unidades dele mesmo, 0.60 unidades da manufatura, mas nenhum produto agrícola.

   (a) Construa a matriz de consumo para esta economia e determine quais demandas intermediárias são criadas se a agricultura planeja produzir 100 unidades.

   (b) Obtenha a matriz de Leontief e interprete os seus coeficientes.

   (c) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer uma demanda final de 18 unidades para a agricultura, e nenhuma demanda final para os outros setores. Que relação você observa entre a resposta e a matriz de Leontief?

2) A matriz de consumo abaixo em dados de insumo-produto da economia norte-americana em 1958, com dados para 81 setores agrupados em 7 grandes setores [1]: (1) produtos domésticos e pessoais não metálicos, (2) produtos metálicos finais (como veículos motorizados), (3) produtos metálicos

[1] Para detalhes, consulte W. W. Leontief, "The Structure of the U.S. Economy", *Scientific American*, April 1965, pp. 30–32.

básicos e mineração, (4) produtos não metálicos básicos e agricultura, (5) energia, (6) serviços e (7) produtos diversos.

$$\begin{bmatrix} .1588 & .0064 & .0025 & .0304 & .0014 & .0083 & .1594 \\ .0057 & .2645 & .0436 & .0099 & .0083 & .0201 & .3413 \\ .0264 & .1506 & .3557 & .0139 & .0142 & .0070 & .0236 \\ .3299 & .0565 & .0495 & .3636 & .0204 & .0483 & .0649 \\ .0089 & .0081 & .0333 & .0295 & .3412 & .0237 & .0020 \\ .1190 & .0901 & .0996 & .1260 & .1722 & .2368 & .3369 \\ .0063 & .0126 & .0196 & .0098 & .0064 & .0132 & .0012 \end{bmatrix}$$

Calcule os níveis de produção para satisfazer a demanda final

$$\mathbf{d} = [\ 74000 \quad 56000 \quad 10500 \quad 25000 \quad 17500 \quad 196000 \quad 5000\ ]^T$$

(unidades em milhões de dólares). A demanda acima é razoável para 1958, mas a demanda próxima ao ano de 1964 foi

$$\mathbf{d} = [\ 99640 \quad 75548 \quad 14444 \quad 33501 \quad 23527 \quad 263985 \quad 6526\ ]^T.$$

Calcule os níveis de produção desta demanda e compare com o resultado anterior.

3) Na página do IBGE https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/contas-nacionais/9085-matriz-de-insumo-produto.html há informações sobre o resultado de atividades econômicas. Leia a explicação. Depois, clique o link "Downloads" à esquerda na página, acesse as informações do ano de 2015 e baixe a planilha relativa a 12 setores da economia.

   Nesta planilha, localize a aba que contém a matriz de consumo e calcule a matriz de Leontief. Compare o seu resultado com a matriz de Leontief que está na planilha. Interprete alguns coeficientes da matriz de Leontief.

Referências

Howard Anton, Chris Rorres, *Álgebra Linear (com aplicações)*, Bookman, Porto Alegre, 2012

Wassily W. Leontief, *Input-Output Economics*, Scientific American, October 1951, pp. 15–21

David C. Lay, Steven R. Lay, and Judi J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Pearson Education, Inc., 2016

Ronald E. Miller and Peter D. Blair, *Input-Output Analysis*, Cambridge University Press, 2009